4.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Integraalrekening**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- het begrip integraal — het verband tussen integraal en oppervlakte
- het begrip primitieve (functies)
- de hoofdstelling van de integraalrekening — somregel, constante-regel en substitutieregel voor integreren
- oppervlakte van een vlakdeel ingesloten door grafieken en lijnen
- omwentelingslichaam — inhoud van een omwentelingslichaam

Activiteitenlijst

- de integraal van een functie op een bepaald interval berekenen (o.a. met behulp van Riemann-sommen)
- integralen berekenen door primitiveren
- integreren met behulp van integreerregels en de hoofdstelling van de integraalrekening
- de oppervlakte van vlakdelen berekenen door integreren, waar nodig met de GR
- inhoud van omwentelingslichamen berekenen, zowel bij wenteling om de x-as als bij wenteling om de y-as

Achtergronden

Al in de Oudheid deden wetenschappers pogingen om de lengte, de oppervlakte en de inhoud van lichamen exact te berekenen. De omtrek en de oppervlakte van een cirkel, de oppervlakte en inhoud van cilinder, kegel en bol, het waren allemaal klassieke problemen. **Eudoxus (408—355 v.Chr.)** bedacht er de **uitputtingsmethode** voor en vooral **Archimedes (287—212 v.Chr.)** paste die techniek toe. Deze laatste vond met name de inhoud van cilinder, kegel en bol en bijvoorbeeld de oppervlakte onder een parabool.

Figuur 1

Nadeel van die techniek was dat hij steeds aan het object in kwestie moest worden aangepast, het was geen eenvoudig ‘rekenrecept’. Dat ontstond pas in de zeventiende eeuw toen **Newton (1642—1727)** en **Leibniz (1646—1716)** onafhankelijk van elkaar de technieken van differentiëren en primitiveren ontwikkelden.

De integraalrekening zoals we die nu hebben opgebouwd is een globale weergave van de theorie van **Bernard Riemann (1826—1866)** waarvan je hier een afbeelding ziet. Hij ontwikkelde de begrippen ‘Riemann-som’ en ‘Riemann-integraal’.

Toepassen

Opgave 1: Arbeid

Onder arbeid wordt in de natuurkunde verstaan: het product van de kracht die werkt in de bewegingsrichting van een bewegend voorwerp en de lengte van de afgelegde weg. Als die kracht voortdurend verandert, bereken je de arbeid met behulp van een integraal.

Neem bijvoorbeeld een balletje aan een elastiek. Als je het wegschiet, zal de spankracht van het elastiek afhangen van de afgelegde weg x. In dat geval is de kracht die op het balletje wordt uitgeoefend een functie $F(x)$. De arbeid W bereken je dan door de arbeid op deelintervallen van de afgelegde weg op te tellen:

$$W = \sum_{k=1}^{n} F(x_k) \cdot \Delta x$$

Je ziet dat je ook hier met Riemannsommen kunt werken.

Als het aantal deelintervallen oneindig groot wordt (en dus $\Delta x \to 0$) wordt de arbeid een integraal:

Figuur 2

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

Hang je bijvoorbeeld een gewicht aan een veer, dan werkt op dat gewicht een veerkracht die volgens de wet van Hooke recht evenredig is met de uitwijking x uit de ruststand: $F(x) = C \cdot x$.

Als u de uiteindelijke afstand is die het gewicht heeft afgelegd dan is de door de veerkracht verrichte arbeid:

$$W = \int_0^u F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^u (C \cdot x)\,\mathrm{d}x = \int_0^u (C \cdot x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}Cu^2.$$

Aan een veer hangt men een massa van 1 kg. Na enige tijd hangt de veer weer stil. Hij is dan 10 cm uitgetrokken. In de onderste stand werken er twee krachten op de massa: de zwaartekracht en de veerkracht. De zwaartekracht is bij benadering gelijk aan $m \cdot g$. De veerkracht is recht evenredig met de uitwijking.

a Bereken de veerconstante C. Neem $g = 10$ m/s^2.

Als je de veer verder naar beneden uitrekt, dan moet je een extra kracht uitoefenen.

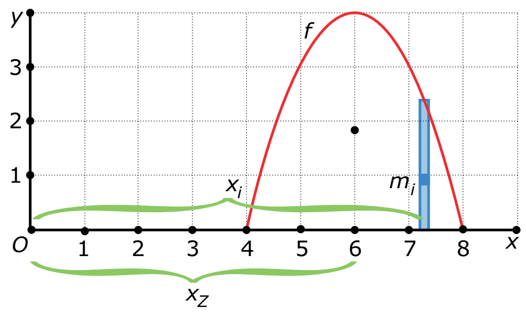
b Hoe groot is die kracht als de veer 20 cm uitgetrokken is?

c Hoeveel arbeid verricht je als je de massa 30 cm vanuit de evenwichtsstand naar beneden trekt?

Opgave 2: Zwaartepunt

Het **zwaartepunt** van een object is het punt ten opzichte waarvan de massa van dat object in evenwicht is. Het object gedraagt zich alsof alle massa zich als één gewicht in het zwaartepunt bevindt.

Stel dat je het zwaartepunt van het gekleurde vlakdeel hiernaast wilt berekenen. Dit zwaartepunt noem je $Z(x_Z, y_Z)$. Je gaat er van uit dat de massa van het vlakdeel homogeen is verdeeld, dus recht evenredig is met de oppervlakte ervan. Het gewicht is daarom $\int_4^8 c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.



Figuur 3

Kijk eerst in de x-richting. Je kunt dan het vlakdeel opdelen in allemaal kleine massa's. Bij elke massa hoort in de x-richting een moment ten opzicht van (bijvoorbeeld) de oorsprong O van het assenstelsel van $x_i \cdot G_i$ (moment is gewicht maal arm).

Tel je al die momenten (in de x-richting) op dan krijg je $\int_4^8 x \cdot c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dit is gelijk aan het moment van het totale gewicht in de zwaartepunt, dus: $x_Z \cdot \int_4^8 c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_4^8 x \cdot c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

Door beide integralen te berekenen, bereken je de x-waarde van het snijpunt. In de y-richting kun je een vergelijkbare redenering houden. Die wordt wel iets ingewikkelder omdat je met de inverse van de functie moet werken...

Ga er van uit dat het vlakdeel wordt begrensd door de x-as en een parabool met top (6,4) die door (4,0) en (8,0) gaat.

a Voer de berekening die hierboven wordt beschreven ook daadwerkelijk uit.

b Het antwoord van a mag je niet verrassen, hier was zo'n moeilijke berekening overbodig. Licht dat toe.

Het berekenen van de y-waarde van het zwaartepunt gaat op een vergelijkbare manier. Maar nu heb je de functies $x = 6 \pm \sqrt{4-y}$ nodig. De formule voor de berekening van het zwaartepunt wordt nu

$y_Z \cdot \int_0^4 c \cdot 2\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y = \int_0^4 y \cdot c \cdot 2\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y$

c Licht deze formule toe.

d Bereken met de grafische rekenmachine de y-waarde van het zwaartepunt van het gegeven vlakdeel.

e Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van het gebied G dat wordt ingesloten door de parabool $y = 4 - x^2$, de parabool $y = 3 - x^2$ en de x-as.

Een geodriehoek is een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Zo'n driehoek kun je zo in het assenstelsel leggen, dat ΔABC met $A(-a,0)$, $B(a,0)$ en $C(0,a)$ ontstaat.

f Laat zien dat ΔABC inderdaad gelijkbenig is. Bewijs met behulp van integreren dat het zwaartepunt $Z\left(0,\frac{1}{3}a\right)$ is.

Opgave 3: Benzineverbruik

Een auto die met een snelheid van 20 m/s rijdt, trekt 5 seconden op met een versnelling van 2 m/s^2. Na die 5 seconden is de snelheid van de auto 30 m/s.

a Stel een formule op waarmee je de snelheid tijdens die 5 seconden kunt berekenen.

b Hoeveel meter legt de auto in die tijd af?

c Ga na dat de auto in 1 uur 5,75 liter benzine verbruikt als de snelheid tijdens dat uur 20 m/s is.

d Laat zien dat het verbruik in de tijdsperiode $[t, t + \Delta t]$ ongeveer gelijk is aan:
$\left(1{,}3 \cdot 10^{-7}(20 + 2t)^2 - 3{,}6 \cdot 10^{-6}(20 + 2t) + 10^{-4}(20 + 2t)\right) \cdot (20 + 2t) \cdot \Delta t$.

e Bereken met een integraal het benzineverbruik in die 5 seconden. Gebruik daarbij de grafische rekenmachine.

Testen

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}5x + 4$ op het interval $[-2,2]$.

a Verdeel het interval $[-2,2]$ in vier gelijke deelintervallen, en bereken de onder- en de bovensom bij deze verdeling.

b Bereken het verschil tussen onder- en bovensom als je het interval in acht gelijke deelintervallen verdeelt.

Opgave 5

Bepaal de functie F waarvoor geldt:

a $F'(x) = x\sqrt{x}$ met $F(4) = 0$.

b $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ met $F(2) = 0$.

c $F'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(3-2x)^2}$ met $F(2) = 0$.

Opgave 6

Bepaal de volgende onbepaalde integralen:

a $\int x^2\sqrt{2x}\, \mathrm{d}\, x$

b $\int \left(x^2-4\right)^2 \mathrm{d}\, x$

c $\int x\sqrt{2+x^2}\, \mathrm{d}\, x$

Opgave 7

Bereken het exacte antwoord van deze bepaalde integralen en controleer je antwoorden met de rekenmachine:

a $\int_1^8 7\sqrt[3]{x}\, \mathrm{d}\, x$

b $\int_0^2 \frac{2}{(1+2x)^2} \mathrm{d}\, x$

c $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x}\, \mathrm{d}\, x$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$.

a Bereken: $\int_0^6 f(x)\, \mathrm{d}\, x$.

b Bepaal de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as op het interval $[0,6]$.

c Waarom heb je bij a en b niet hetzelfde antwoord gekregen? Verklaar het verschil.

d Bereken de lengte van de parabool tussen zijn twee snijpunten met de assen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3-x}$.
Er is een getal a zodat de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f en de x-as op het interval $[a,3]$ gelijk is aan 18.

a Bereken a.

Er is ook een getal b zodat de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as op het interval $[0,b]$ even groot is als de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as op het interval $[b,3]$.

b Benader b in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Als je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ op het interval $[1,p]$ wentelt om de x-as dan ontstaat een figuur met de vorm van een soort toeter.

a Laat zien dat de inhoud van deze toeter gelijk is aan: $I = \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Als p oneindig groot wordt dan ontstaat een oneindig lange toeter. Toch is de inhoud van deze toeter niet oneindig groot.

b Bepaal de inhoud van deze oneindige toeter.

Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = x^3$.
Door de grafiek op $[0,p]$ om de x-as te wentelen ontstaat een omwentelingslichaam a.
Door de grafiek op $[0,p]$ om de y-as te wentelen ontstaat een omwentelingslichaam b.
Beide omwentelingslichamen hebben hetzelfde volume.

Bereken p.

Opgave 12

De punten $P(x,y)$ die voldoen aan de vergelijking $x^2 + 4y^2 = 16$ liggen op een ellips.

a Met welke twee functievoorschriften kun je deze ellips beschrijven?

b Bereken de oppervlakte van deze ellips in twee decimalen nauwkeurig.

c Bereken de omtrek van deze ellips in twee decimalen nauwkeurig.

Examen

Opgave 13: Twee halve parabolen

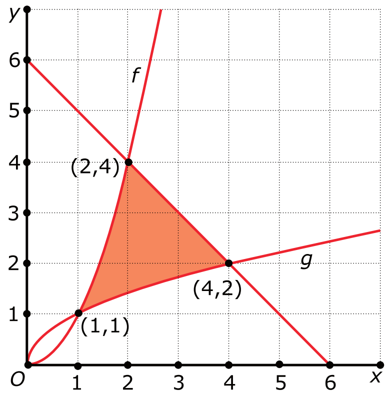
Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$, beide met domein $[0, \rightarrow\rangle$. De lijn $x = p$, met $0 < p < 1$, snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.

a Bereken de exacte waarde van p waarvoor de lengte van het lijnstuk AB maximaal is.

In de figuur zijn de grafieken van f en g en ook de lijn $y = 6 - x$ getekend. Het gebied ingesloten door de grafiek van f, de grafiek van g en de lijn $y = 6 - x$, is in de figuur gekleurd.

b Bereken algebraïsch de exacte oppervlakte van dit gebied.

(bron: examen wiskunde B vwo 2004, tweede tijdvak)



Figuur 4

Opgave 14: Zwaartepunt

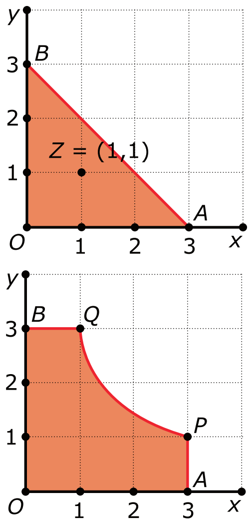
De hoekpunten van driehoek OAB zijn $O(0,0)$, $A(3,0)$ en $B(0,3)$.

a Toon met behulp van een integraal aan dat het zwaartepunt van driehoek OAB het punt $(1,1)$ is.

Het vlakdeel $OAPQB$ wordt begrensd door de x-as, de y-as, de lijn $x = 3$, de lijn $y = 3$ en de hyperbool $y = 3/x$.

b Bereken de x-coördinaat van het zwaartepunt van dit vlakdeel in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen wiskunde B vwo 2001, tweede tijdvak, aangepast)



Figuur 5

Opgave 15: Gebroken functie

Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

a Bereken langs algebraïsche weg de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

V is het gebied dat wordt ingesloten door de lijn $y = 5$ en de grafiek van f.

b Bereken de omtrek van V in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen wiskunde B vwo 2003, tweede tijdvak, aangepast)

Opgave 16: Onafhankelijk van n

De grafieken van de functies $y = \frac{1}{2}x^2$ en $y = x$ sluiten een gebied G in. Door dit gebied G te wentelen om de x-as ontstaat een omwentelingslichaam.

a Bereken de exacte waarde van de inhoud van dit omwentelingslichaam.

Voor $n = 1,2,3,...$ bekijken we het vierkant $OQ_nP_nR_n$, waarvan twee zijden langs de coördinaatassen vallen en waarvan het punt $P_n(n,n)$ een hoekpunt is. De grafiek van de functie $y = \frac{1}{n}x^2$ gaat door O en door P_n. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $y = \frac{1}{n}x^2$ in het punt P_n is onafhankelijk van n.

b Toon dit aan.

De grafiek van $y = \frac{1}{n}x^2$ verdeelt het vierkant $OQ_nP_nR_n$ in twee stukken V en W.

De verhouding van de oppervlakten van V en W is onafhankelijk van n.

c Toon dit aan.

(bron: examen wiskunde B vwo 2005, eerste tijdvak, aangepast)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.