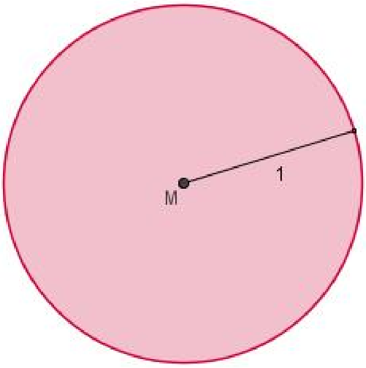
4.4 Oppervlakte en lengte

Inleiding

Al in de tijd van de Oude Grieken was het berekenen van de exacte omtrek en de exacte oppervlakte van een cirkel een 'hot item'. Zij ontwikkelden daar methoden voor, maar pas in de 17de eeuw bedachten Isaac Newton en Gottfried Wilhelm Leibniz er onafhankelijk van elkaar een structurele methode voor. Dit was het begin van de integraalrekening.
En hebben zij dan het probleem van het berekenen van de omtrek en de oppervlakte van de cirkel ook opgelost?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- oppervlaktes ingesloten door lijnen en grafieken van functies berekenen;
- de lengte van een deel van de grafiek van een functie berekenen.

Voorkennis

- integralen bepalen met behulp van primitiveren;
- integralen bepalen met behulp van je grafische rekenmachine.

Verkennen

Opgave V1

Als je een cirkel met straal 1 in een xy-assenstelsel plaatst met middelpunt M in de oorsprong, dan geldt voor elk punt op deze cirkel $x^2 + y^2 = 1$.
Je kunt daarom de cirkel beschrijven met twee functievoorschriften.

a Welke twee functievoorschriften?

b Hoe kun je nu de oppervlakte van deze cirkel bepalen met behulp van integreren?

c Ga na, dat de oppervlakte van de cirkel (ongeveer) gelijk is aan π.

d En kun je iets verzinnen voor het berekenen van de omtrek van deze cirkel?

Uitleg 1

Je ziet hier het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$.
De oppervlakte van dit vlakdeel vind je door de integraal van f op $[0,1]$ en de integraal van g op $[0,1]$ van elkaar af te trekken:

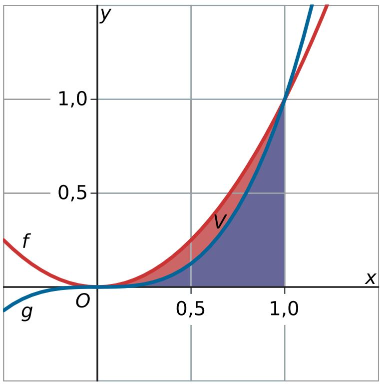
$\text{opp}(V) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Vanwege de somregel voor integreren kun je dit schrijven als:

$\text{opp}(V) = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

Je krijgt dan:

$\text{opp}(V) = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{12}$



Figuur 2

Deze wijze van oppervlakteberekening kun je heel algemeen toepassen.
Geldt op een bepaald interval $[a,b]$ dat $f(x) \geq g(x)$, dan is de oppervlakte van het vlakdeel V dat door beide grafieken wordt ingesloten op dat interval gelijk aan:

$\text{opp}(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\text{d}x$

Of de grafieken onder of boven de x-as liggen, maakt daarbij niet uit.

Opgave 1

In **Uitleg 1** zie je hoe je de oppervlakte kunt berekenen van het gebied ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$.

a Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $x = 2$.

b Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $y = 2$.

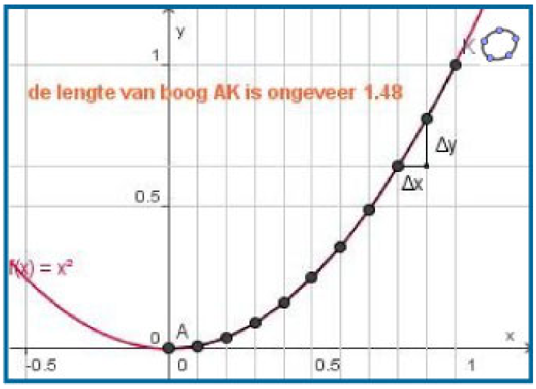
Uitleg 2

Bekijk de applet.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$.

Wil je ook de omtrek van V berekenen, dan moet je de lengte van de grafiek van f op $[0,1]$ en die van de grafiek van g op $[0,1]$ optellen. Maar hoe bereken je zo'n lengte?

De lengte L van de grafiek van f op $[0,1]$ wordt benaderd door dit interval op te delen in deelintervallen met een breedte van Δx. Op elk deelinterval heeft de grafiek een beginpunt en een eindpunt, het lijnstukje tussen beide benadert de grafiek steeds beter naarmate Δx naar 0 nadert. Als je de lengtes van al die lijnstukjes optelt, krijg je een benadering van L:



Figuur 3

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Laat je nu Δx steeds dichter naar 0 naderen, dan nadert $\frac{\Delta y_k}{\Delta x}$ naar $f'(x_k)$.

De Riemannsom gaat dan over in: $L = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\text{d}x$.

Omdat $f'(x) = 2x$ wordt dit: $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,\text{d}x = 1{,}47894...$.

Opgave 2

Bestudeer hoe in **Uitleg 2** de lengte van een grafiek met behulp van integreren kan worden berekend.

a Waar komt de uitdrukking $(\Delta x)^2 + (\Delta y_k)^2$ in de Riemannsom vandaan?

b Controleer zelf de benadering van de lengte van de grafiek van $f(x) = x^2$ op het interval $[0,1]$ door met behulp van de grafische rekenmachine de bijbehorende integraal te berekenen.

c Bereken de lengte van de grafiek van $g(x) = x^3$ op het interval $[0,1]$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het berekenen van oppervlaktes en lengtes kun je gebruik maken van integralen (neem telkens aan dat f op $[a,b]$ bestaat en differentieerbaar is):

- Geldt op $[a,b]$ dat $f(x) \geq 0$, dan is de oppervlakte van het vlakdeel V tussen de grafiek van f en de x-as op dat interval gelijk aan:

  $\text{opp}(V) = \int_a^b f(x)\,\text{d}\,x$

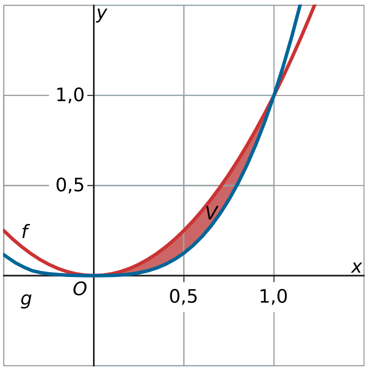
  Is $f(x) \leq 0$ op $[a,b]$, dan is: $\text{opp}(V) = \int_a^b -f(x)\,\text{d}\,x$.
- Geldt op $[a,b]$ dat $f(x) \geq g(x)$, dan is de **oppervlakte van het vlakdeel V dat door beide grafieken wordt ingesloten** op dat interval gelijk aan:

  $\text{opp}(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\text{d}\,x$
- De **booglengte** van de grafiek van f op interval $[a,b]$ is:

  $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\text{d}\,x$

Voorbeeld 1

Bereken de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^4$ op het interval $[0,1]$.



Figuur 4

Antwoord

$\text{opp}(V) = \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right)\text{d}\,x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{15}$

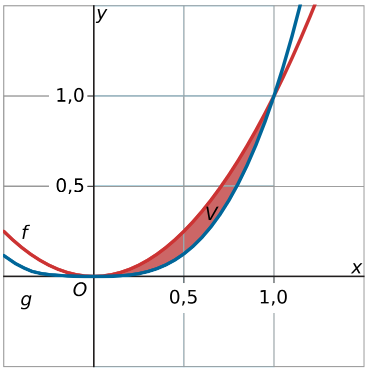
Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = x + 2$.

Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van f en g. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 1**.

Voorbeeld 2

Bereken de omtrek van het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^4$ op het interval $[0,1]$.



Figuur 5

Antwoord

De omtrek van V is de som van de lengte L_f van de grafiek van f op interval $[0,1]$ en de lengte L_g van de grafiek van g op datzelfde interval.
Nu is $f'(x) = 2x$ en $g'(x) = 4x^3$.
En dus is de omtrek van V:

$L = L_f + L_g = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,\text{d}\,x + \int_0^1 \sqrt{1 + \left(4x^3\right)^2}\,\text{d}\,x$

Beide integralen zijn alleen met de grafische rekenmachine te bepalen.
Ga na dat de omtrek van V ongeveer $1{,}479 + 1{,}600 = 3{,}079$ is.

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = x + 2$.

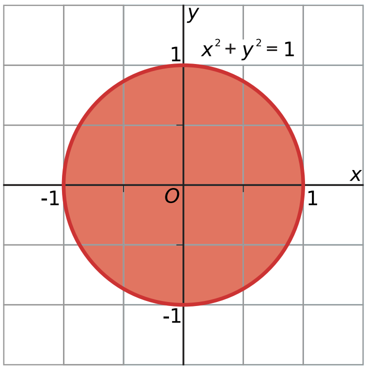
a Bereken lengte van de grafiek van g op het interval [-2,1] met behulp van integreren. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 3**.

b Omdat de grafiek van g op het interval [-2,1] een lijnstuk is, kun je deze lengte ook berekenen met behulp van meetkundige technieken. Ga na, dat je daarmee dezelfde uitkomst krijgt.

c Bereken de omtrek van het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van beide functies.

Voorbeeld 3

Bereken met behulp van integreren de oppervlakte en de omtrek van de cirkel c met middelpunt O en straal 1 in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 6

Antwoord

Omdat voor elk punt van de cirkel geldt $x^2 + y^2 = 1$, kun je hem beschrijven met twee functies: $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ en $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$.
Voor de berekening van oppervlakte en omtrek kijk je alleen naar de bovenste helft, dus y_1.

$\text{opp}(c) = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx \approx 3{,}14$.

Voor de omtrek (booglengte $L(c)$) geldt:

$$L(c) = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx \approx 6{,}28.$$

Denk er om dat je niet hebt bewezen dat de oppervlakte π en de omtrek 2π is. Je hebt ze alleen benaderd met je GR. Je kunt met integreren ook gemakkelijk de oppervlakte van een deel van de cirkel berekenen...

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** worden de oppervlakte en de omtrek van een cirkel met straal 1 berekend.

a Bereken met behulp van integraalrekening de oppervlakte van een cirkel met straal 2.

b Bereken door integreren de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ en de lijn $x = 1$, dat rechts van die lijn ligt, in twee decimalen nauwkeurig. Bereken deze oppervlakte ook meetkundig.

c Benader door integreren de omtrek van een cirkel met straal 2. Ga na, dat je uitkomst overeen komt met de formule voor de omtrek van een cirkel.

Verwerken

Opgave 6

De grafieken van de functies $f(x) = x^2 + 3x + 5$ en $g(x) = -x^2 + 5x + 9$ zijn parabolen.

a Bereken de oppervlakte van het gebied tussen beide parabolen.

b Bereken ook de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g, en de lijn $x = 4$.

Opgave 7

Ten opzichte van rechthoekig assenstelsel Oxy is K de grafiek van de functie $f(x)=\sqrt{3-x}$.
Er is een getal a, zo dat K, de x-as en de lijn $x=a$ een vlakdeel begrenzen, waarvan de oppervlakte gelijk is aan 18.

Bereken a.

Opgave 8

Bereken de booglengte van de grafiek van de functie f op het gegeven interval:

a $f(x)=x^3+\frac{1}{12x}$ op [1,2].

b $f(x)=x\sqrt{x}$ op [1,4].

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x)=x^4-13x^2+36$.

a Breng de grafiek van deze functie zo in beeld dat alle karakteristieken duidelijk te zien zijn.

De grafiek van f en de x-as sluiten drie vlakdelen in. De grootste van die drie vlakdelen is V.

b Bereken door primitiveren de oppervlakte van V.

c De raaklijn aan de grafiek van f voor $x=3$, de y-as en de grafiek van f sluiten een vakdeel W in. Bereken de oppervlakte daarvan.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y=2{,}5$.

Opgave 11

Bekijk de grafieken van de functies $f(x)=\left(x^2-4\right)(2x+1)$ en $g(x)=x^2-4$. De lijn met vergelijking $x=p$ met $-2<p<0$ snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.

a Bereken de waarden van p waarvoor de oppervlakte van driehoek OAB gelijk is aan 3.

Met domein $\mathbb{R}$ zijn nu voor elke $a>0$ gegeven de functies:

$f_a(x)=\left(ax^2-4\right)(2x+1)$ en $g_a(x)=ax^2-4$.

De grafieken van $f_a(x)$ en $g_a(x)$ hebben drie gemeenschappelijke punten en sluiten twee vlakdelen V_1 en V_2 in.

b Bewijs dat de oppervlakten van V_1 en V_2 gelijk zijn.

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x)=x+3-4\sqrt{x}$ met domein $[0,\rightarrow\rangle$.
Ten opzichte van een assenstelsel Oxy is K de grafiek van f.

a Gebruik de rekenmachine om K te tekenen.

b Bereken de oppervlakte van de driehoek gevormd door de x-as en de raaklijnen aan K in de punten waar K de x-as snijdt.

c Gebruik de rekenmachine om de lengte van K tussen $x=1$ en $x=9$ te bepalen.

Testen

Opgave 13

Gegeven is de functie f door $f(x) = 4 - \frac{4}{(x-3)^2}$.

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig de extremen van f en breng de grafiek zo in beeld dat alle karakteristieken zichtbaar zijn.

b De grafiek van de functie f en de beide coördinaatassen sluiten een gebied G in. Bereken door primitiveren de oppervlakte van G.

c Bereken de omtrek van G in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x\sqrt{x}$ en $g(x) = 2$.

a Teken het gebied G dat door de grafieken van f en g, en de y-as wordt ingesloten.

b Bereken de oppervlakte van het gebied G.

c Bereken de lengte van de grafiek van f tussen $x = 1$ en $x = 4$.