# 4.3 Integreren

## Inleiding

Het berekenen van integralen door middel van primitiveren noem je wel integreren. Omdat primitiveren weinig anders is dan terugrekenen vanuit een afgeleide, spelen bij het integreren de differentieerregels een belangrijke rol. Bijvoorbeeld kun je er de somregel voor integralen uit afleiden en een regel die vaak de substitutieregel wordt genoemd. En uit de productregel leid je de methode van partieel integreren af. Met name deze laatste methode is geen verplichte leerstof voor vwo, je vind er iets over bij de Toepassingen in het Totaalbeeld van dit onderwerp.

### Je leert in dit onderwerp

- het begrip integreren en de hoofdstelling van de integraalrekening;
- een paar belangrijke integreerregels;
- integreren toepassen bij het berekenen van oppervlaktes onder de grafiek van een functie.

### Voorkennis

- alle differentieerregels gebruiken
- eenvoudige functies primitiveren;
- integralen bepalen met behulp van je grafische rekenmachine.

## Verkennen

### Opgave V1

Bekijk de functie $f$ met $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3}$.

Je kunt met je GR gemakkelijk de integraal van $f$ op het interval $[-1,1]$ berekenen, uitkomst 0. Verder kun je de oppervlakte berekenen van het vlakdeel $V$ ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = -1$ en $x = 1$. Het gaat daarbij echter om benaderingen...

Probeer nu met behulp van primitiveren aan te tonen dat de oppervlakte van $V$ exact $\frac{3}{8}$ is.

TIP: Denk aan de kettingregel voor differentiëren.

## Uitleg

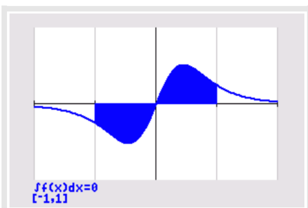
Onder integreren versta je het berekenen van een integraal met behulp van primitiveren. Je maakt daarbij gebruik van de hoofdstelling van de integraalrekening, die zegt dat: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ waarin $F$ een primitieve van $f$ is. Let er wel op dat de functie $f$ geen verticale asymptoten mag hebben op het interval $[a,b]$.

Meestal noteer je $F(b) - F(a)$ als $[F(x)]_a^b$.

De kunst hierbij is natuurlijk het vinden van $F(x)$ door 'omgekeerd differentiëren', door omkeren van de differentieerregels...

Bekijk de functie $f$ met $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3}$.

Je kunt met je GR gemakkelijk de integraal van $f$ op het interval $[-1,1]$ berekenen, uitkomst 0. Verder kun je de oppervlakte berekenen van het vlakdeel $V$ ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = -1$ en $x = 1$. Het gaat daarbij echter om benaderingen...
Wil je die oppervlakte exact bepalen, dan moet je een primitieve vinden van $f(x) = x(1+x^2)^{-3}$.




Figuur 1

Het vinden van die primitieve kan door terugrekenen vanuit de kettingregel. Je moet dan herkennen, dat $x = \frac{1}{2} \cdot 2x$ en dat $2x$ de afgeleide is van $g(x) = 1 + x^2$.

Dus is $x(1 + x^2)^{-3} = \frac{1}{2}(g(x))^{-3} \cdot g'(x)$ en is een primitieve $F(x) = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}(g(x))^{-2}$.

De oppervlakte van $V$ is: $2 \cdot \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \left[-\frac{1}{4}(1 + x^2)^{-2}\right]_0^1 = \frac{3}{8}$.

## Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de hoofdstelling van de integraalrekening genoemd, maar niet bewezen. Een volledig bewijs hiervan valt ook buiten de leerstof voor het vwo. Maar enige toelichting is wel mogelijk. Je weet uit het voorgaande onderdeel dat als $F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$ geldt $F'(x) = f(x)$. Dat dit alleen opgaat voor mooie brave functies (aaneengesloten grafieken zonder verticale asymptoten) is niet ter sprake gekomen.

**a** Waarom moet $F(a) = 0$?

**b** Leg uit waarom $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

**c** Bereken met behulp van de hoofdstelling voor de integraalrekening $\int_{-1}^1 x^2 \, \mathrm{d}x$.

**d** Welk probleem doet zich voor als je $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$ wilt berekenen? Wat doet je grafische rekenmachine hiermee?

## Opgave 2

Bestudeer hoe in de **Uitleg** $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} \, \mathrm{d}x$ wordt berekend door primitiveren.

**a** Controleer de gevonden primitieve door differentiëren.

**b** Bereken op dezelfde manier $\int_0^1 6x(1 + x^2)^3 \, \mathrm{d}x$.

# Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Onder **integreren** versta je het berekenen van een integraal met behulp van primitiveren. Je maakt daarbij gebruik van de **hoofdstelling van de integraalrekening**, die zegt dat: $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ waarin $F$ een primitieve van $f$ is. Let er wel op dat de functie $f$ geen verticale asymptoten mag hebben op het interval $[a,b]$.

Meestal noteer je $F(b) - F(a)$ als $[F(x)]_a^b$.

De kunst hierbij is natuurlijk het vinden van $F(x)$ door primitiveren, door 'omgekeerd differentiëren'. Uit de differentieerregels kun je de volgende **integreerregels** afleiden:

- de **constante-regel**:

  $\int_a^b k \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$
- de **somregel**:

  $\int_a^b (f(x) + g(x)) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$
- de **substitutieregel** (omgekeerde kettingregel):

  $\int_a^b (f(g(x)) \cdot g'(x)) \, \mathrm{d}x = [F(g(x))]_a^b$

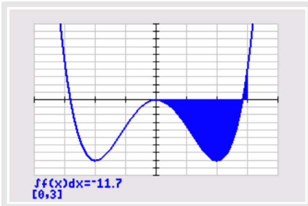
## Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f$ met $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2$.
Bereken met behulp van integreren de integraal van $f$ op het interval [0,3] en de oppervlakte van het vlakdeel begrensd door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijn $x = 3$.

Antwoord

Bij het primitiveren gebruik je in feite twee integreerregels: de constante-regel en de somregel. Maar waarschijnlijk let je daar nauwelijks op, een functie zoals dit is eenvoudig te primitiveren:
$F(x) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{5}x^5 - 4 \cdot \frac{1}{3}x^3 + c = \frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + c$.

De gevraagde integraal is: $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + c\right]_0^3 = -11{,}7$.



Figuur 2

Voor het berekenen van de gewenste oppervlakte moet je nu de grafiek van $f$ bekijken. Want bij een integraal leveren gebieden met negatieve functiewaarden ook een negatieve uitkomst op. In dit geval zie je dat er zowel een gebied met negatieve als een gebied met positieve functiewaarden is.
Je berekent dus eerst de nulpunten van $f$. Ga na dat dat dit $\left(-\sqrt{8},0\right)$, $(0,0)$ en $\left(\sqrt{8},0\right)$ zijn.
Voor de oppervlakte tel je nu twee integralen bij elkaar op:

$\text{opp}(V) = \int_0^{\sqrt{8}} -f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{8}}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

Ga zelf na dat de oppervlakte wordt: $\text{opp}(V) = \frac{125}{15}\sqrt{8} - 11{,}7$.

## Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

**a** Bereken de integraal van $f$ over het interval [1,3].

**b** Welke integreerregels heb je nu gebruikt? Bekijk eventueel **Voorbeeld 1**.

**c** Heb je met de integraal uit a de oppervlakte van een gebied berekend? Waarom?

Breng de grafiek van $f$ in beeld zo, dat je het gebied ingesloten door de grafiek van $f$ en de $x$-as kunt zien.

**d** Welke nulpunten heeft $f$?

**e** Bereken de oppervlakte van het beschreven gebied. Bekijk eventueel **Voorbeeld 1**.

## Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 2\frac{1}{4}$.

**a** Bereken de nulpunten van de functie $f$. Breng de grafiek van de functie in beeld.

**b** Bereken de oppervlakte van het gebied $V$ dat ingesloten is door de grafiek van $f$ en de $x$-as.

**c** De raaklijn aan de grafiek van $f$ in het punt van $f$ met $x$-coördinaat 3, de $y$-as en de grafiek van $f$ sluiten een gebied in. Bereken de oppervlakte daarvan.

## Opgave 5

De integraal $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$ kun je zien als de oppervlakte van een bepaald gebied.

**a** Welke vorm heeft dat gebied? Breng het in beeld met je grafische rekenmachine.

**b** Bepaal deze oppervlakte met de grafische rekenmachine.

**c** Waarom kun je deze oppervlakte niet exact berekenen met behulp van de tot nu toe genoemde integreerregels?

**d** Bereken de exacte oppervlakte van dit gebied met behulp van meetkundige kennis.

## Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f$ met $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.
Bereken met behulp van integreren de oppervlakte van het vlakdeel begrensd door de grafiek van $f$ en de $x$-as.

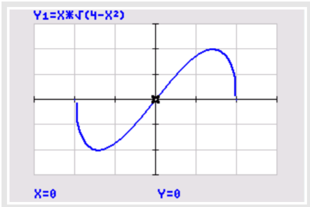
Antwoord

Voor het primitiveren van $f$ kun je terugrekenen vanuit de kettingregel.
Herken, dat de afgeleide van $g(x) = 4 - x^2$ is $g'(x) = -2x$.
Omdat $x = -\frac{1}{2} \cdot -2x$, kun je $f$ schrijven als: $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot g'(x) \cdot (g(x))^{0,5}$.

En dus is $F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1,5} \cdot (g(x))^{1,5} + c = -\frac{1}{3}(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2} + c$.

Met behulp van de grafiek zie je dat de gevraagde oppervlakte is:

$opp(V) = 2 \cdot \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2} + c\right]_0^2 = \frac{16}{3}$




Figuur 3

## Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt bij het integreren ook gebruik gemaakt van de substitutieregel.

**a** Loop het voorbeeld na.

**b** Bereken $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

**c** Bereken de exacte oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ en de $x$-as.

## Opgave 7

De integraal $\int_1^9 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ kun je op twee manieren exact berekenen.

**a** Doe dit eerst door van de substitutieregel gebruik te maken.

**b** Je kunt dit ook doen door de deling uit te voeren. Laat zien dat je dan hetzelfde krijgt.

## Verwerken

## Opgave 8

Bereken de volgende integralen exact en controleer de antwoorden met de grafische rekenmachine.

**a** $\int_0^1 \frac{3}{(2x+1)^4}\,\mathrm{d}x$

**b** $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$

**c** $\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x$

**d** $\int_{-3}^{1} -\frac{2}{\sqrt{3-2x}}\,\mathrm{d}x$

### Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5(x-4)(x^2-4)$.

**a** Breng de grafiek van deze functie zo in beeld dat alle karakteristieken duidelijk te zien zijn.

**b** Bereken de oppervlakte van het vlakdeel $V$ ingesloten door de grafiek van $f$ en de $x$-as.

**c** De raaklijn aan de grafiek van $f$ voor $x = 2$, de $y$-as en de grafiek van $f$ sluiten een vakdeel $W$ in. Bereken de oppervlakte daarvan.

### Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 3x - x^3$.

**a** Bereken de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $f$ en de $x$-as.

**b** Het gebied ingesloten door de grafiek van $f$ en de $x$-as op het interval $\left[0,\sqrt{3}\right]$ wordt door de lijn $x = p$ verdeeld in twee gebieden met gelijke oppervlakte.
Bereken $p$ in twee decimalen nauwkeurig.

### Opgave 11

Bereken de volgende onbepaalde integralen:

**a** $\int -\frac{(x-3)(x+1)}{x^4}\,\mathrm{d}x$

**b** $\int (2x+5)^3\sqrt{2x+5}\,\mathrm{d}x$

**c** $\int x^2\sqrt{6-x^3}\,\mathrm{d}x$

**d** $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

### Opgave 12

Een heel eenvoudig voorbeeld van een functie die je wel kunt differentiëren, maar niet primitiveren is $f(x) = \frac{1}{x}$.

**a** Welk probleem doet zich voor als je deze functie met de machtsregel wilt primitiveren?

**b** Bereken $\int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

**c** Waarom heeft $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ geen betekenis? Zou je toch een waarde aan deze integraal kunnen toekennen? En zo ja, wat is dan je redenering?

## Testen

### Opgave 13

Bereken de volgende integralen exact en controleer je antwoorden met de grafische rekenmachine.

**a** $\int_0^1 \sqrt[5]{3x+1}\,\mathrm{d}x$

**b** $\int_1^4 \frac{2x^2-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

**c** $\int_{-1}^1 \frac{4x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

### Opgave 14

Gegeven is de functie $f$ door $f(x) = -2x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van $f$ en de $x$-as in twee decimalen nauwkeurig.

## Practicum

Met *Algebra*__KIT__ kun je oefenen met **integreren en oppervlakte berekenen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

**Werk met AlgebraKIT.**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.