4.1 De integraal

Inleiding

Een waterleidingmaatschappij zorgt voor veilig drinkwater. Ze slaan dit op in grote spaarbekkens. Er stroomt vrijwel voortdurend water in en ook wordt er voortdurend water aan onttrokken. Het verschil tussen *instroom* en *uitstroom* is de *stroom* in m^3/uur en afhankelijk van de tijd t in uren. Je kunt van die stroom een grafiek maken en daarmee bepalen hoeveel water er aan het einde van een dag (ongeveer) in het spaarbekken is bijgekomen of afgegaan.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de integraal van een functie bepalen;
- de begrippen Riemann-som, ondersom en bovensom en deze berekenen.

Voorkennis

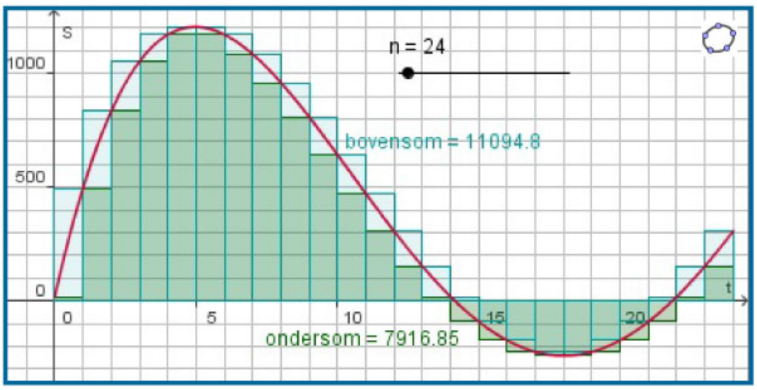
- werken met alle basisfuncties.

Verkennen

Opgave V1

In een groot spaarbekken stroomt vrijwel voortdurend water in en ook water uit. Het verschil tussen *instroom* en *uitstroom* is de *stroom* in m^3/uur, dus afhankelijk van de tijd t in uren.
Je kunt van die stroom een grafiek maken en daarmee bepalen hoeveel water er aan het einde van een dag (ongeveer) in het spaarbekken is bijgekomen of afgegaan.
Je kunt bijvoorbeeld elk uur een ondergrens en een bovengrens van de hoeveelheid *stroom* vaststellen. Positieve waarden betekenen dat er meer instroom dan uitstroom is, bij negatieve waarden is dat andersom. De bovensom is het totaal van de bovengrenzen per uur, de ondersom dat van de ondergrenzen per uur.

Bekijk de applet: Stroom in een spaarbekken



Figuur 2

a Hoeveel schat je dat er die dag aan m^3 water is bijgekomen?

b Hoe kun je de schatting verbeteren?

Uitleg

Bekijk de applet: Stroom in een spaarbekken

Gebruik de figuur bij **Verkennen V1**.

In een groot spaarbekken stroomt vrijwel voortdurend water in en ook water uit. Het verschil tussen *instroom* en *uitstroom* is de *stroom* in m^3/uur, dus afhankelijk van de tijd t in uren.
Je kunt van die stroom een grafiek maken en daarmee bepalen hoeveel water er aan het einde van een dag (ongeveer) in het spaarbekken is bijgekomen of afgegaan.
Je kunt bijvoorbeeld elk uur een ondergrens en een bovengrens van de hoeveelheid *stroom* vaststellen. Positieve waarden betekenen dat er meer instroom dan uitstroom is, bij negatieve waarden is dat andersom. De bovensom is het totaal van de bovengrenzen per uur, de ondersom dat van de ondergrenzen per uur.

Bekijk de grafiek van de *stroom*, het verschil tussen instroom en uitstroom, in een spaarbekken. De hoeveelheid die deze dag erbij is gekomen ligt in tussen bovensom en ondersom.

Door de tijdseenheid Δt te verkleinen, kun je bovensom en ondersom nauwkeuriger vaststellen. Ze komen dan dichter bij elkaar te liggen en je schatting wordt beter.
De ondersom is het totaal van $S_{\text{min}\,(t)} \cdot \Delta t$ waarin S_{min} steeds het minimum van S op elk deelinterval is.
De bovensom is het totaal van $S_{\text{max}\,(t)} \cdot \Delta t$.
De integraal van S is het getal waar bovensom en ondersom beide naar naderen.

Dit veronderstelt wel dat ze inderdaad naar hetzelfde getal naderen, een belangrijke voorwaarde voor het bestaan van de integraal.
Verdeel je het interval $[0,24]$ in n gelijke deelintervallen, dan is de ondersom het totaal van $S_{\text{min}\,(t_1)} \cdot \Delta t + S_{\text{min}\,(t_2)} \cdot \Delta t + ... + S_{\text{min}\,(t_n)} \cdot \Delta t$.

Dit schrijf je korter als $\underline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} S_{\text{min}\,(t_k)} \cdot \Delta t$.

En zo is de bovensom in formulevorm $\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} S_{\text{max}\,(t_k)} \cdot \Delta t$.

Als $\lim_{n \to \infty} \left(\overline{S_n} - \underline{S_n} \right) = 0$ dan bestaat de integraal. Hij wordt aangeduid als $\int_0^{24} S(t)dt$.

Ondersommen en bovensommen zijn met de grafische rekenmachine te bepalen.
De grafische rekenmachine kan echter ook rechtstreeks een integraal voor je benaderen.
In beide gevallen heb je dan een functievoorschrift voor S nodig.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de toename en de afname per uur van de hoeveelheid water in een spaarbekken beschreven. Er is een grafiek getekend die iets te maken heeft met de hoeveelheid water in het bekken.

a Wat stelt deze grafiek precies voor?

b Hoe kun je de totale hoeveelheid bijgekomen water aan het einde van deze dag berekenen?

c Voer die berekening uit op basis van intervallen van 1 uur.

d Voer die berekening nog eens uit op basis van intervallen van 0,5 uur.

Opgave 2

De hoeveelheid water H in het spaarbekken op $t = 0$ was $H(0) = 10000 \text{ m}^3$. Je hebt aan het eind van de voorgaande opgave een schatting gemaakt van $H(24) - H(0)$.

a Leg uit dat je hebt berekend: $H(24) - H(0)$.

b De grafiek is in drie delen te verdelen: twee delen waarbij *stroom* positief is en een deel waarbij *stroom* negatief is. Welk verband bestaat er tussen de schatting bij a en de oppervlakte van deze drie delen van de grafiek en de t-as?

Opgave 3

De variabele *stroom* wordt voorgesteld door de functie $f(t)$.

a Neem een tijdsinterval van 0,25 uur. Bepaal de ondersom van $f(t)$ op het interval [0,24].

b Bepaal vervolgens de bovensom van $f(t)$ op ditzelfde interval.

c Welke waarde schat je nu voor de integraal van $f(t)$ over dit interval?

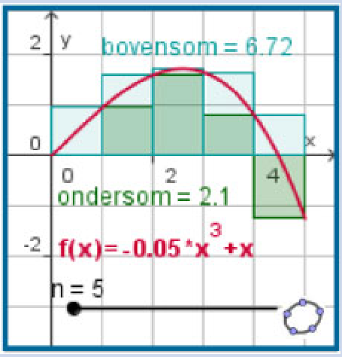
d Wat stelt je antwoord bij c voor?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Onder de **integraal** van een functie f op het interval $[a,b]$ versta je de som van alle waarden van $f(x_k) \cdot \Delta x$ op dit interval als Δx naar 0 nadert. Zo'n integraal benader je zo:



Figuur 3

- Verdeel het interval $[a,b]$ in n(gelijke) deelintervallen met breedte Δx. Bij elk deelinterval maak je een rechthoek met breedte Δx en als hoogte de kleinste functiewaarde op dat deelinterval én een rechthoek met breedte Δx en als hoogte de grootste functiewaarde op dat deelinterval.
- De **ondersom** is $f_{\min(x_1)} \cdot \Delta x + f_{\min(x_2)} \cdot \Delta x + \ldots + f_{\min(x_n)} \cdot \Delta x$, wat je kortweg schrijft als $\underline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} f_{\min}(x_k) \cdot \Delta x$.
- De **bovensom** is $f_{\max(x_1)} \cdot \Delta x + f_{\max(x_2)} \cdot \Delta x + \ldots + f_{\max(x_n)} \cdot \Delta x$, wat je kortweg schrijft als $\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} f_{\max}(x_k) \cdot \Delta x$.

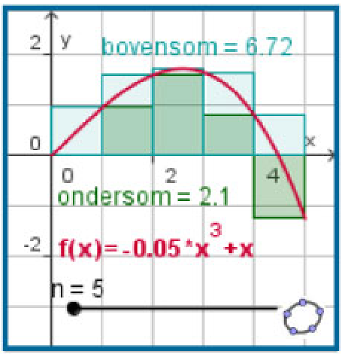
Als $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\overline{S_n} - \underline{S_n}\right) = 0$ dan bestaat de integraal. Hij wordt aangeduid als $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
De ondersom en de bovensom noem je **Riemannsommen** en het bepalen ervan is een lastige bezigheid. De grafische rekenmachine kan ook rechtstreeks de integraal voor je benaderen. Zie het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet hier de grafiek van de functie f met $f(x) = -0{,}05x^3 + x$ op het interval [0,5].
Benader met de grafische rekenmachine de bovensom en de ondersom die in de figuur zijn aangegeven.

Benader ook de integraal $\int_0^5 f(x) \cdot dx$.

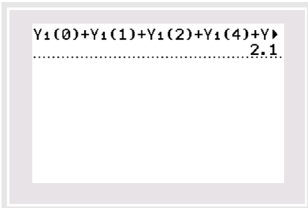


Figuur 4

Antwoord

Met $n = 5$ deelintervallen van lengte 1 wordt de ondersom:
$\underline{S_5} = 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(4) + 1 \cdot f(5)$.

Voor de bovensom heb je op het derde deelinterval het maximum van f op dat interval nodig. Met je GR (of met behulp van differentiëren) vind je max. $f(2{,}58) \approx 1{,}72$. De bovensom wordt:
$\overline{S_5} \approx 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(2{,}58) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4)$.
Ga zelf na, dat je de waarden uit de figuur vindt.



Figuur 5

De integraal kun je gemakkelijk met je GR benaderen.
Uiteraard vind je een waarde tussen ondersom en bovensom in.
Als je n verhoogt gaan onder- en bovensom de integraal benaderen.

Opgave 4

Bekijk in de **Theorie** wat de integraal van een functie over een bepaald interval voorstelt en bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je in een bepaald geval zo'n integraal benadert met behulp van Riemann-sommen.

a Controleer eerst of je ook inderdaad de in de figuur gegeven Riemann-sommen krijgt.

b Verdeel het gegeven interval in 10 gelijke deelintervallen. Bereken de ondersom en de bovensom en geef een benadering van de integraal.

c Benader de integraal met je grafische rekenmachine, bestudeer eventueel eerst het **Practicum**.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = 2x$ op het interval [0,5].

a Teken de grafiek van de functie. Verdeel het interval [0,5] in vijf gelijke delen en bepaal de onder- en de bovensom.

b Geef met behulp van je antwoorden bij a een schatting van de integraal van f op het interval [0,5].

c Verdeel het interval [0,5] in tien gelijke deelintervallen en bereken de onder- en bovensom. Geef een nauwkeuriger schatting van de integraal van f op [0,5].

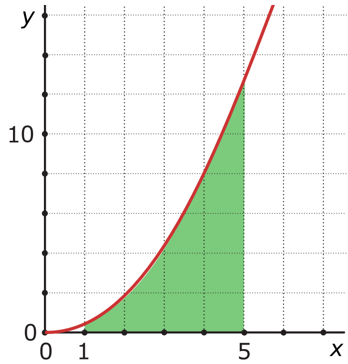
d Bereken zonder gebruik te maken van onder- en bovensommen de bedoelde integraal. Gebruik daarbij wat meetkundige kennis.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = 0{,}5x^2$.

Omdat op $[1{,}5]$ geldt dat $f(x) \geq 0$, is de integraal $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van f de x-as en de twee lijnen $x = 1$ en $x = 5$.
Bereken de oppervlakte van V in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 6

Antwoord

Dit gaat rechtstreeks met de grafische rekenmachine.

Figuur 7

De oppervlakte van V is:

$\text{opp}(V) = \int_1^5 0{,}5x^2\,\mathrm{d}x \approx 20{,}67$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt een integraal met de grafische rekenmachine benaderd.

a Verdeel het interval $[1{,}5]$ in acht gelijke delen en bereken de onder- en de bovensom.

b Ga na, dat de waarde die de rekenmachine voor de integraal van f op het interval $[1{,}5]$ vindt tussen de ondersom en de bovensom in ligt.

c Bekijk de gegeven functie op het interval $[0{,}2]$. Bepaal met je grafische rekenmachine de integraal van f over dat interval.

d Verdeel het interval $[0{,}2]$ in n gelijke deelintervallen. Stel een formule op voor de ondersom op dat interval.

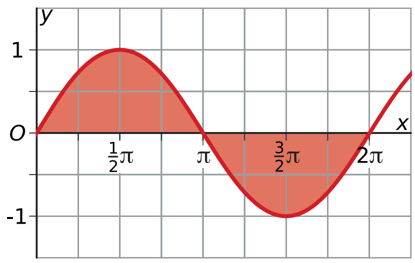
e Gebruik de formule $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ en toon daarmee aan dat de ondersom gelijk is aan $\underline{S} = \frac{2(n-1)(2n-1)}{3n^2}$.

f Bepaal met behulp van de gevonden formule voor de ondersom de exacte waarde van de integraal van f over het interval $[0{,}2]$.

Voorbeeld 3

Je ziet hier de grafiek van de functie f met $f(x) = \sin(x)$ op $[0{,}2\pi]$.

Bereken $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ en bereken de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van f en de x-as.



Figuur 8

Antwoord

Met je grafische rekenmachine vind je meteen: $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Dat ligt ook voor de hand, want de standaard sinusfunctie heeft op $[\pi{,}2\pi]$ dezelfde functiewaarden als op $[0{,}\pi]$, alleen zijn ze op $[\pi{,}2\pi]$ negatief en op $[0{,}\pi]$ positief.

Wil je de gevraagde oppervlakte weten, dan moet je $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$ en $\int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x)\,\mathrm{d}x$ optellen.

Maar je kunt sneller $2 \cdot \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ berekenen.

Je ziet dat de gevraagde oppervlakte 4 is.

Opgave 7

Het verschil tussen een integraal en de oppervlakte ingesloten door de grafiek van een functie en de x-as wordt in **Voorbeeld 3** besproken.

a Controleer zelf met je grafische rekenmachine dat $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

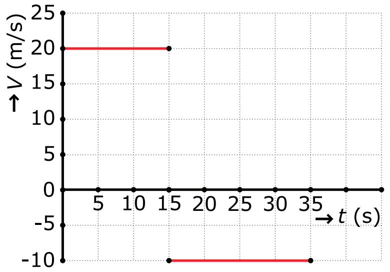
b Ga ook na dat $\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

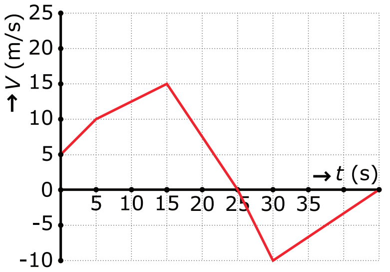
c Hoeveel is dus $\int_0^{0,5\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$?

d Hoe groot is de oppervlakte ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sin(x)$, de x-as en de lijn $x = 1,5\pi$?

Opgave 8

De linker grafiek geeft de snelheid weer van een voorwerp dat langs een rechte weg voortbeweegt.





Figuur 9

a Welke betekenis heeft het feit dat de snelheid na 15 seconden negatief is geworden?

b Hoe ver is het voorwerp na 35 seconden van zijn beginpunt verwijderd?

Een ander voorwerp beweegt langs dezelfde rechte weg. De snelheid ervan verandert echter voortdurend volgens de rechter grafiek.

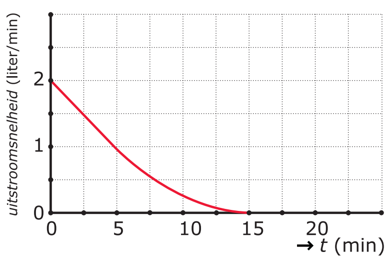
c Leg uit, waarom de totale afgelegde afstand vanaf $t = 0$ de integraal van de functie $v(t)$ is.

d Geef een zo goed mogelijke schatting van de totale afgelegde afstand.

Verwerken

Opgave 9

Uit een vat stroomt aan de onderkant olie. In het begin is de uitstroomsnelheid het grootst omdat dan de oliedruk op de bodem het grootst is. In de grafiek zie je hoe de uitstroomsnelheid varieert. In de eerste vijf minuten neemt de snelheid bij benadering lineair af.



Figuur 10

a Welke betekenis heeft de oppervlakte onder deze grafiek?

b Hoeveel olie is er tijdens de eerste vijf minuten uit het vat gestroomd?

c Schat de totale uitgestroomde hoeveelheid olie. Verdeel daarvoor het interval [5,15] in vier gelijke delen.

d Op welk tijdstip is er 4 liter uit het vat gestroomd?

Opgave 10

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ op het interval [0,9].

a Verdeel het interval [1,9] in vier gelijke deelintervallen, en bepaal de onder- en bovensom bij deze verdeling. Geef hiermee een schatting van de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as op het interval [1,9].

b Verdeel het interval [1,9] in acht gelijke intervallen en bepaal de onder- en de bovensom bij deze verdeling. Pas hiermee je schatting van de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as op het interval [1,9] aan.

Opgave 11

Bereken (alleen waar nodig met je grafische rekenmachine) de volgende integralen:

a $\int_2^5 (1+x)\,\mathrm{d}x$

b $\int_2^5 (1+x)^2\,\mathrm{d}x$

c $\int_{1,5}^2 \pi\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$

d $\int_{-2}^2 1\,\mathrm{d}x$

e $\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x$

f $\int_3^5 \sqrt{2x-6}\,\mathrm{d}x$

Opgave 12

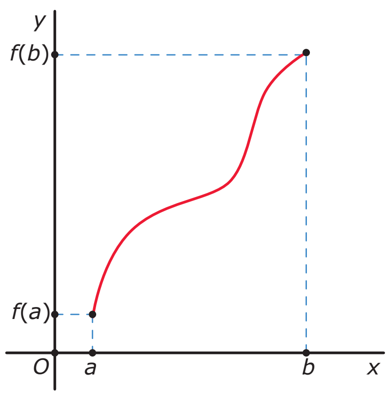
Gegeven is de functie f door $f(x) = x^2 - 8x$.

a Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as op het interval [2,6].

b Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as op het interval [6,10].

Opgave 13

Als een functie f overal stijgend of overal dalend is op een interval dan bestaat er een formule waarmee je het verschil tussen onder- en bovensom kunt bepalen. Die formule bepaalt de nauwkeurigheid van de benadering. Teken een stijgende functie op een interval $[a,b]$ zoals hiernaast.



Figuur 11

a Verdeel $[a,b]$ in vier gelijke delen en teken in de grafiek de rechthoeken die horen bij de ondersom en de rechthoeken die bij de bovensom horen.

Je kunt het interval $[a,b]$ in n gelijke deelintervallen verdelen. Altijd is het verschil tussen de onder- en de bovensom gelijk aan het verschil in oppervlakte van twee rechthoeken.

b Welke rechthoeken zijn dat en hoe groot is dat verschil bij $n = 4$?

c Hoe groot is het verschil tussen onder- en bovensom bij een benadering met 10 rechthoeken? En bij n rechthoeken?

Een voorbeeld van een stijgende functie is de sinusfunctie op het interval $\left[0,\frac{1}{2}\pi\right]$.

d Voor welke waarde van n is het verschil tussen onder- en bovensom kleiner dan 0,0001?

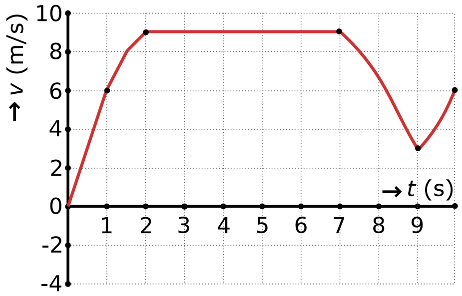
Toepassen

Opgave 14: Hardloper

Wanneer een hardloper met een constante snelheid rent, dan kun je de afgelegde afstand gemakkelijk berekenen. Je vermenigvuldigt de snelheid van de hardloper met de tijd waarin hij hardgelopen heeft.

In werkelijkheid rent een hardloper vaak niet met een constante snelheid. Hij zal bij de start eerst moeten versnellen totdat hij zijn gewenste snelheid heeft. Vroeger of later zal hij weer vertragen omdat hij moe wordt of een obstakel op zijn weg tegenkomt om misschien daarna weer te versnellen enzovoorts.

Bekijk de volgende snelheid-tijd-grafiek.



Figuur 12

a Hoe kun je de afgelegde afstand op het interval [0,10] s berekenen?

b Verdeel de oppervlakte onder de snelheid-tijd grafiek op de intervallen [0,2] en [7,10] in kolommen met een breedte van 1 s. Om de oppervlakte van zo'n kolom te bepalen en daarmee een zo nauwkeurig mogelijke schatting te krijgen van de afgelegde weg in dat deelinterval, kun je kiezen uit verschillende snelheden die de hoogte voor de kolom bepalen.

Geef bij elke optie commentaar.

1. De laagste snelheid die je in dat interval afleest.
2. De hoogste snelheid die je in dat interval afleest.
3. De snelheid die je halverwege dat interval afleest.
4. De gemiddelde snelheid die je in dat interval afleest.

c Bepaal nu de totaal afgelegde weg van de hardloper op het interval [0,10] als je per interval de laagste snelheid kiest om de oppervlakte van die kolom te berekenen.

Dit heet de ondersom van de afgelegde weg voor $\Delta t = 1$ s.

d Bepaal vervolgens de totaal afgelegde weg van de hardloper op het interval [0,10] als je per interval de hoogste snelheid kiest om de oppervlakte van die kolom te berekenen.

Dit heet de bovensom van de afgelegde weg voor $\Delta t = 1$ s.

e De werkelijke afstand die de hardloper heeft afgelegd ligt tussen de waarden van de onder- en bovensom. Hoe kun je de werkelijk afgelegde afstand beter benaderen?

f Een redelijk goede benadering krijg je door de punten op de grafiek door lijnstukken te verbinden en dan de oppervlakte daaronder te berekenen.

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie f door $f(x) = 4 - x^2$ op het interval [-4,4].

a Verdeel dit interval in 8 gelijke deelintervallen en bereken de onder- en de bovensom van de functie.

b Bereken de integraal met behulp van je grafische rekenmachine en laat zien dat dit getal tussen de onder en de bovensom in ligt.

c Bereken de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as op het gegeven interval.

Opgave 16

Gegeven is de derdegraads functie $f(x) = x^3$ met domein [0,2].

a Verdeel het interval [0,2] in vier gelijke delen en bepaal de ondersom en de bovensom van f op dit interval.

b Je kunt het interval ook in n gelijke deelintervallen verdelen. Laat zien dat dan de ondersom gelijk is aan: $\frac{16}{n^4} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^3$.

c Laat zien dat het verschil tussen boven- en ondersom gelijk is aan $\frac{16}{n}$.

d Hoe groot moet je n kiezen om zeker te weten dat de eerste drie decimalen van de integraal correct zijn?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de grafische rekenmachine kun je integralen berekenen, bovensommen en ondersommen benaderen, en dergelijke. In dit practicum zie je hoe dat in zijn werk gaat.

- **Integralen met de TI84**
- **Integralen met de TInspire**
- **Integralen met de Casio fx-CG50**
- **Integralen met de HP-prime**
- **Integralen met de NumWorks**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.