3.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle basisregels voor het differentiëren geleerd, de **differentieerregels**. Het is nuttig om nog even alle begrippen op een rijtje te zetten voor jezelf.

Begrippenlijst

- somregel — constante-regel — machtsregel voor gehele positieve n
- samengestelde functie (kettingfunctie) — kettingregel
- productfunctie — productregel
- gebroken functie — quotiëntregel
- differentieerbaarheid — knikpunt — sprong in grafiek — verticale raaklijn
- modelleren — optimaliseringsprobleem

Activiteitenlijst

- differentiëren met de basisregels
- differentiëren met de kettingregel en de algemene machtsregel
- differentiëren met de productregel
- differentiëren met de quotiëntregel
- onderzoek of een functie voor een bepaalde x differentieerbaar is
- toepassingen van differentiaalrekening

Achtergronden

Figuur 1 Leonhard Euler

De grootste wiskundige prestatie van de achttiende eeuw was de ontwikkeling van de 'calculus', van de 'analyse'. Daarbij gaat het om differentiaal- en integraalrekening, de functietheorie en alles wat daaruit voortvloeide. De belangrijkste rol daarin werd vervuld door **Leonhard Euler (1707—1783)**. Euler leerde de wiskunde in Basel van **Johann Bernoulli (1667—1748)** en werd in 1773 opvolger van **Daniël Bernoulli (1700—1782, zoon van Johann Bernoulli)** als hoogleraar in St. Petersburg.

Vooral dankzij een fenomenaal geheugen (hij kende bijvoorbeeld de eerste zes machten van de eerste 100 priemgetallen uit zijn hoofd evenals alle formules uit de trigonometrie en de analyse en een grote hoeveelheid gedichten) kon hij zelfs toen hij volslagen blind was zijn onvoorstelbare productiviteit op het gebied van de wiskunde en de mathematische fysica handhaven. Met 'Introductio in Analysin Infinitorum' schreef hij in 1748 het eerste samenhangende werk over analyse. Toch was Euler bepaald geen monomane excentrieke wiskundige, maar vooral een gezinsmens (hij had 13 kinderen waarvoor hij allerlei spelletjes ontwierp).

Lees ook: **Grafieken en verandering, differentiaalrekening**.

Testen

Opgave 1

Differentieer de functies.

a $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

b $f(x) = 4x\sqrt{x^2 + 1}$

c $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

d $f(x) = \frac{x^2+1}{4x}$

e $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$

Opgave 2

In een chemisch proces zijn druk p en volume V afhankelijk van de tijd t.

Er geldt: $p(t) = \frac{13}{V(t)}$.

Verder is $V(2) = 3$ en $p'(t) = 2$ voor elke waarde van t.

a Bereken exact $V'(2)$.

b Op $t = 0$ is de druk $p(0) = 1$. Stel een functievoorschrift op voor $p(t)$.

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{15x}{x^2+36}$

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

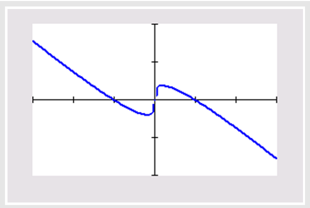
b De raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 3 snijdt de y-as in punt A. Stel een vergelijking van die raaklijn op en bereken de coördinaten van A.

Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -x + \sqrt[3]{x}$.

a Bereken met behulp van differentiëren de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Er is een raaklijn aan de grafiek van f die door (0,1) gaat. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze raaklijn?



Figuur 2

Opgave 5

De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{x} & \text{als} \quad x < -2 \vee x > 2 \\ ax^3 + bx & \text{als} \quad -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a Neem $a = 1$ en $b = -2{,}5$. Onderzoek of deze functie differentieerbaar is voor elke waarde van x.

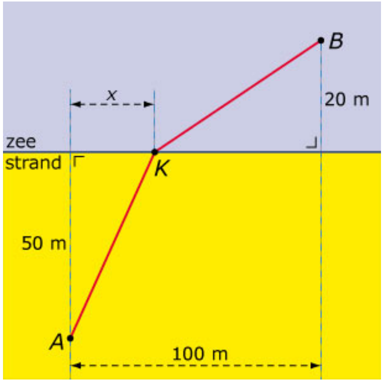
b Er zijn waarden voor a en b te vinden waarbij deze functie wel differentieerbaar is. Bereken deze waarden van a en b.

Opgave 6

Een zwemmer is in nood voor de kust van Bergen. De tekening geeft een beeld van de situatie. De zwemmer in nood bevindt zich bij punt B in zee. Een lid van de reddingsbrigade ziet de zwemmer in nood en wil in actie komen. Zij bevindt zich in punt A. Ze wil natuurlijk via de snelste weg naar de drenkeling toe. Maar wat is de snelste weg?

Een deel van de weg moet ze rennend afleggen en een deel zwemmend. Ze rent met een gemiddelde snelheid van 6 m/s en ze zwemt met een gemiddelde snelheid van 1,5 m/s. Hoe kan ze het snelst hulp bieden? Noem het punt waar ze in het water stapt K.

Punt K kan overal langs de aangegeven 100 m-lijn liggen. De tijd die ze nodig heeft om in B te komen moet natuurlijk zo klein mogelijk zijn. Noem de totale tijd t, de gemiddelde snelheid over het strand v_s en de gemiddelde snelheid in zee v_z.



Figuur 3

a Druk t uit in AK, KB, v_s en v_z.

b Formuleer een verband tussen t en x.

c Bepaal met behulp van differentiëren de minimale tijd die ze nodig heeft om de zwemmer te bereiken. Geef je antwoord in tienden van seconden nauwkeurig.

d Bepaal de kortste weg.

Toepassen

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan. Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren.

Figuur 4

Onder bepaalde aannames kun je een formule afleiden voor het aantal auto's dat op een bepaald punt kan passeren afhankelijk van de snelheid. Bijvoorbeeld:

- Alle auto's passeren het punt met dezelfde constante snelheid van v km/uur.
- Alle auto's hebben dezelfde lengte van ongeveer 4 m.
- Alle auto's houden een onderlinge afstand die gelijk is aan hun remweg.
- Alle auto's hebben dezelfde remweg die is te berekenen door de snelheid v in km/uur te delen door 10, daarvan het kwadraat te nemen en dat getal met 0,75 te vermenigvuldigen.

Stel op grond daarvan een formule op voor het aantal auto's f dat per minuut het punt passeert waar de file ontstaat als functie van v. Bepaal van de gevonden functie $f(v)$ een maximum en vooral de waarde van v waarvoor dat maximum optreedt. Dat is dan de optimale doorstroomsnelheid.

Opgave 7: Files

Bekijk het verhaal over filevorming hierboven. Neem aan dat alle auto's 4 m lang zijn en hun onderlinge afstand precies de remweg R (in meter) is. Deze remweg hangt af van de snelheid v (in km/h).

Er geldt bij benadering: $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.

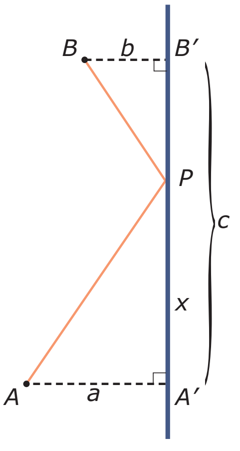
De verkeersdienst zet een teller halverwege de wegversmalling die meet hoeveel auto's er per minuut passeren. Stel nu een formule op voor het aantal auto's dat per minuut de teller passeert. Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid zoveel mogelijk auto's de teller passeren.

Opgave 8: Spiegel

Dit is een beroemd probleem uit de Griekse Oudheid. Het stamt uit de ‘Catoptrica’ van Heroon.

‘Een lichtstraal loopt van punt naar punt doordat hij van het oppervlak van een vlakke spiegel wordt teruggekaatst. Aangenomen dat het licht altijd de kortste route neemt, waar raakt het dan de spiegel?’

P is het punt waar het licht wordt weerkaatst. De afmetingen zijn verder in de figuur te vinden. De lengte van de lichtstraal (L) is gelijk aan de som van de lengtes van AP en PB. De positie van P is bekend als x is berekend.



Figuur 5

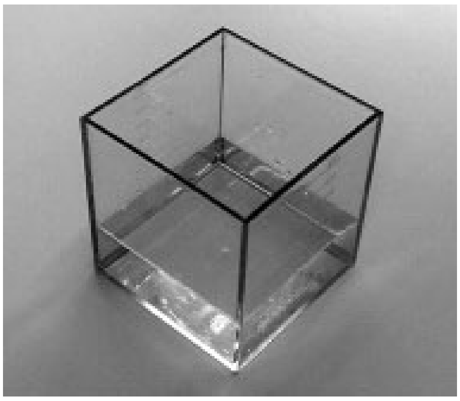
a Stel zelf een formule op voor L als functie van x.

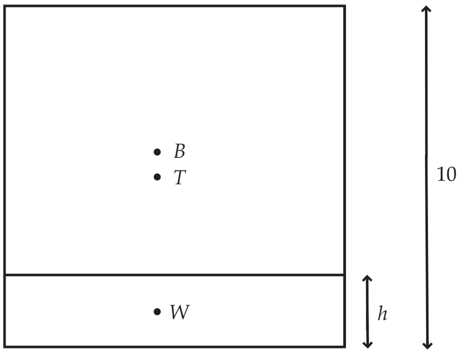
b Neem $a = 2$ dm, $b = 1$ dm en $c = 5$ dm. Bereken met behulp van differentiëren x als L zo klein mogelijk is in twee decimalen nauwkeurig.

c Laat ook zien hoe je dit probleem meetkundig kunt oplossen.

Examen

Opgave 9: Verschuivend zwaartepunt





Figuur 6

Een kubusvormige bak met deksel heeft binnenmaten 10 bij 10 bij 10 centimeter en weegt 1 kilogram. Het zwaartepunt B van de bak ligt in het centrum van de bak, dus 5 cm boven het midden van de bodem. De bak wordt met water gevuld tot een hoogte van h cm. Het zwaartepunt W van het water (de bak niet meegerekend) ligt in het centrum van het water, dus $\frac{1}{2}h$ cm boven het midden van de bodem. Zie de foto en de figuur waarin op schaal een vooraanzicht van de bak is getekend. Het zwaartepunt van het geheel (bak en water samen) noemen we T. Het punt T ligt op het lijnstuk BW.

Er geldt: $d_T = \frac{h}{h+10} d_W + \frac{10}{h+10} d_B$.

Hierbij zijn d_T, d_W en d_B de afstand in centimeter van achtereenvolgens T, W en B tot de bodem.

a Bereken d_T voor $h = 3$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

b Toon aan dat voor de afstand van T tot de bodem, uitgedrukt in h, geldt: $d_T = \frac{h^2+100}{2h+20}$.

c Als de bak leeg is, valt T samen met B. Tijdens het vullen van de bak verschuift de plaats van T eerst omlaag en later weer omhoog. Als de bak vol is, valt T weer samen met B. Bereken voor welke waarden van h geldt: $d_T < 4{,}5$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

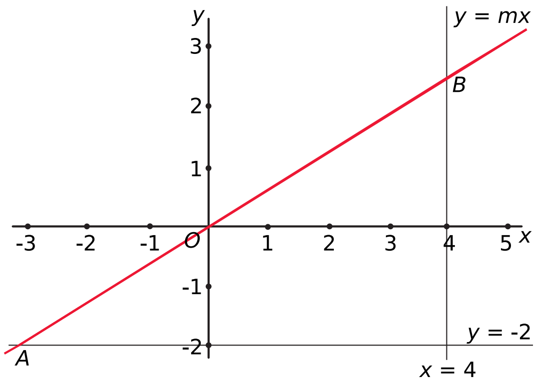
d Bereken exact voor welke waarde van h de afstand van T tot de bodem minimaal is.

(bron: examen wiskunde B vwo 2002, eerste tijdvak)

Opgave 10: Kortste weg

We bekijken de lijn met vergelijking $y = mx$, met $m > 0$. De lijn snijdt de lijn $y = -2$ in A en de lijn $x = 4$ in B.

a Bewijs dat voor elke positieve waarde van m de lengte van het lijnstuk gelijk is aan $\sqrt{(4m+2)^2 + \left(\frac{2}{m}+4\right)^2}$.



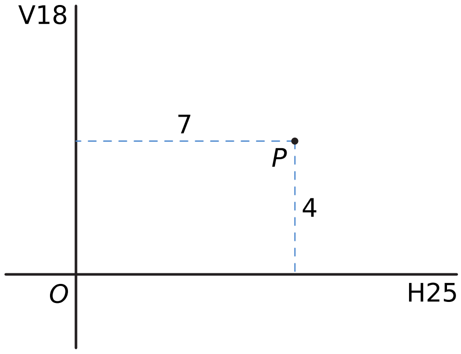
Figuur 7

Plaats P ligt dichtbij het kruispunt van twee wegen, de H25 en de V18. De wegen snijden elkaar loodrecht. Plaats P ligt 4 km van de H25 en 7 km van de V18 af.

Er wordt een nieuwe rechte weg aangelegd die de twee wegen met elkaar verbindt. De nieuwe weg moet door plaats P gaan.

b Bereken in meters nauwkeurig de lengte van de kortste weg die aan deze eisen voldoet.

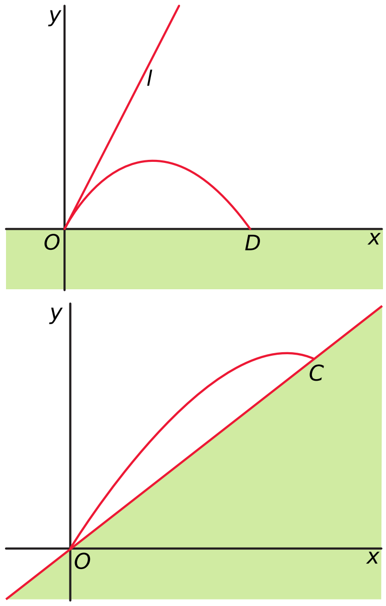
(bron: examen wiskunde B vwo 2002, tweede tijdvak)



Figuur 8

Opgave 11: Kogelbanen

Vanuit een bepaald punt worden kogels afgeschoten met steeds dezelfde beginsnelheid. De hoek waaronder men de kogels afschiet, varieert. We brengen een assenstelsel aan in het vlak van de kogelbaan, met de x-as horizontaal en de y-as verticaal. De kogels worden afgeschoten in het punt (0,0) en komen neer in een punt op de x-as. Zie de bovenste figuur. In deze figuur is behalve de kogelbaan ook de raaklijn l in (0,0) aan deze baan getekend. De kogel wordt weggeschoten in de richting van l. Uit de mechanica is bekend dat een kogelbaan een deel van een parabool is. Een vergelijking van de kogelbaan is: $y = rx - \left(0{,}1 + 0{,}1r^2\right)x^2$. Hierbij is r een constante die afhangt van de hoek waaronder geschoten wordt.



Figuur 9

a De richtingscoëfficiënt van l is gelijk aan r. Toon dit aan.

b Er geldt: $OD = \frac{10r}{1+r^2}$. Toon dit aan.

c Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van r de afstand maximaal is.

d Veronderstel dat de kogel niet op een horizontaal terrein wordt afgeschoten, maar op een hellend terrein met richtingscoëfficiënt 1. Zie de onderste figuur. Het hangt van r af waar de kogel op het terrein neerkomt. Dit punt noemen we C. De x-coördinaat van punt C is $\frac{10(r-1)}{1+r^2}$. Bereken de maximale lengte van OC in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen wiskunde B vwo 2003, tweede tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.