3.6 Optimaliseren

Inleiding

Een **model** is een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid.
In de wetenschap wordt veel met modellen gewerkt omdat de werkelijkheid te complex is om zonder meer te beschrijven. Door niet belangrijke details weg te laten (verstandige aannames te doen) kan een model worden opgesteld dat met wiskundige middelen is te beschrijven en door te rekenen. Uit het doorrekenen van het model worden conclusies getrokken die dan weer kunnen worden vergeleken met de realiteit.
Bij het werken met modellen gaat het vaak om het berekenen van extremen, om 'optimaliseringsproblemen'. Daarbij wordt het differentiëren toegepast. En er zijn nog andere toepassingen van differentiëren...

Je leert in dit onderwerp

- werken met modellen waarin het differentiëren kan worden toegepast, zoals optimaliseringsproblemen;
- raaklijn opstellen door een punt buiten de grafiek.

Voorkennis

- differentiëren met alle differentieerregels;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

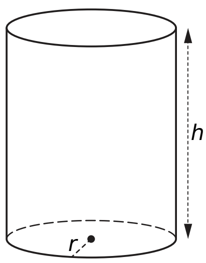
Verkennen

Opgave V1

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.

Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Uitleg



Figuur 1

Een blikfabriek maakt cilindervormige blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag. Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Om die vraag te beantwoorden kun je een rekenmodel opstellen. Bijvoorbeeld zo:

- Doe enkele aannames.
  Het blik is zuiver cilindrisch en de benodigde hoeveelheid blik is gelijk aan de totale oppervlakte van het blik.
- Bepaal welke variabelen een rol spelen.
  Het gaat om het berekenen van de straal van (het grondvlak van) het blik r en de hoogte h, neem beide bijvoorbeeld in centimeter. Het gegeven betreft de inhoud van een blik (1 L = 1000 cm^3), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn.
- Bedenk welke bekende formules hier gelden.
  Ga na, dat voor de inhoud van een cilinder geldt: $I = \pi r^2 h$.
  En voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
- Gebruik de gegevens.
  Omdat $I = 1000$ cm^3 vind je $1000 = \pi r^2 h$.
- Zorg dat er één formule met twee variabelen overblijft.

  Door beide formules te combineren vind je: $A(r) = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$.

Met behulp van differentiëren (of de grafische rekenmachine) vind je nu dat voor $r \approx 5{,}4$ cm en $h \approx 10{,}8$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

a Welke twee formules voor een cilinder worden er gebruikt?

b Welke aannames worden er gedaan?

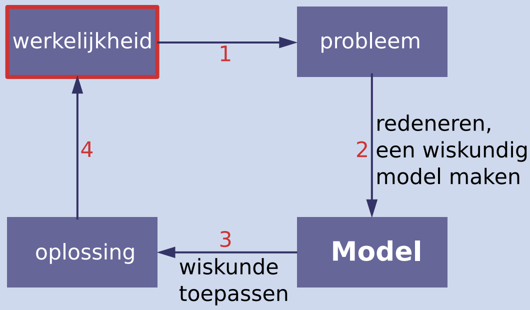
c Laat zien hoe je aan de formule voor $A(r)$ komt.

d Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het blik de hoeveelheid gebruikt materiaal het laagst is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wiskunde wordt veel toegepast in wetenschap, handel en industrie om problemen op te lossen.
Vaak heeft het antwoord op zo'n probleem de vorm van een **wiskundig model**.
Een wiskundig model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid op grond van verstandige aannames. In een goed model zijn alle belangrijke factoren nog aanwezig, alleen de onbelangrijke blijven buiten beschouwing. Meestal heeft het model de vorm van één of meer formules die beschrijven hoe de belangrijke variabelen zich gedragen.



Figuur 2

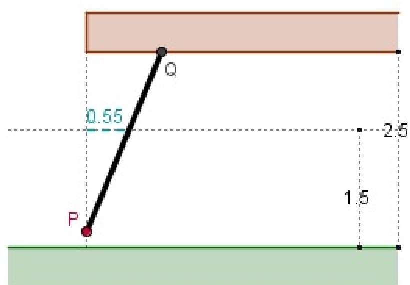
Op die formules wordt dan de geschikte wiskundige theorie losgelaten.
Bij **optimaliseren** gaat het om wiskundige modellen waarbij wordt gezocht naar een maximale of een minimale waarde. Vaak is dat het maximum of minimum van een functie. Je kunt dat vinden met behulp van differentiëren, met of zonder de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Garagedeur

Bekijk de dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur.

Bij het openen van de deur gaat de onderkant (punt P) recht omhoog, terwijl de bovenkant (punt Q) langs het plafond horizontaal naar binnen (rechts) gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is 2,50 m hoog en de auto is 1,50 m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van 1,50 m maximaal naar binnen?



Figuur 3

Antwoord

Maak een schets van de situatie en geef de belangrijke punten een letter.

Noem de afstand van P tot het plafond x en zet de maten van de andere zijden die vaststaan in de schets. De afstand L die de deur op een hoogte van 1,50 m naar binnen komt (de lengte van de horizontale stippellijn binnen de driehoek die de deur met het plafond maakt), is een functie van x.

Voor de lengte L geldt: $L(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{6{,}25 - x^2}$.

Je kunt hiermee berekenen dat het maximum van L bij $x \approx 1{,}84$ m optreedt: $L(1{,}84) \approx 0{,}77$.
Dat wil zeggen dat de garagedeur op een hoogte van 1,50 m maximaal zo'n 77 cm naar binnen komt.

Opgave 2

Bekijk in **Voorbeeld 1** het probleem van de garagedeur.

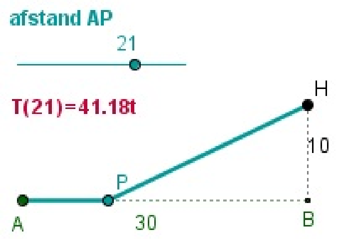
a Toon aan dat voor de lengte L als functie van x de formule in het voorbeeld geldt.

b Toon aan met behulp van differentiëren dat de waarde van L maximaal is voor $x \approx 1{,}84$ m.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Leiding aanleggen

Een woonhuis heeft een nieuwe leiding nodig. Het huis H staat op een afstand van 10 meter van de rechte weg AB. Het aansluitingspunt A voor de leiding ligt 30 meter verderop in de straat. De sleuf voor de leiding kan geheel of gedeeltelijk door de tuin gegraven worden. Het graven en weer netjes dichtmaken van een sleuf in de tuin kost 1,5 keer zo veel tijd als datzelfde werk langs de wegkant. Hoe moet er worden gegraven om alles in zo kort mogelijke tijd te doen?



Figuur 4

Antwoord

P is het punt waarbij de leiding de weg verlaat en dwars door de tuin verder gaat.
Neem x meter voor de lengte van BP en t voor de benodigde tijd per meter langs de weg.
Maak een schets van de situatie en zet alle maten erbij.

De totale benodigde tijd is: $T = t(30 - x) + 1{,}5t\sqrt{x^2 + 100}$.
Met behulp van differentiëren vind je de waarde van x waarvoor T maximaal is, de waarde van t speelt daarbij geen enkele rol.

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 2** het probleem van de sleuf die voor een nieuwe leiding gegraven moet worden.

a Toon aan dat voor de totale tijd $T(x)$ als functie van de afstand x en de benodigde tijd t langs de weg de formule in het voorbeeld geldt.

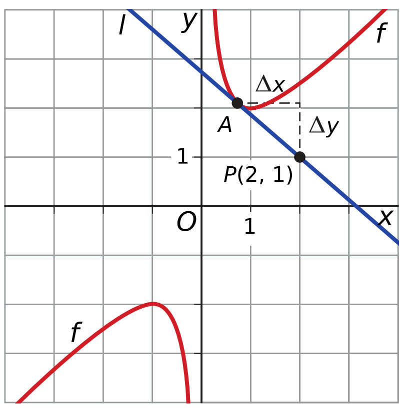
b Toon aan dat bij het vinden van de kortste benodigde tijd voor het graven de waarde van t geen enkele rol speelt.

c Bereken met behulp van differentiëren na hoeveel meter de sleuf van de wegkant naar de tuin af moet slaan om de totale benodigde tijd voor het graven zo kort mogelijk te houden.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Gegeven is de functie: $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
Bereken exact de x-coördinaten van de punten aan de grafiek van f waarvan de raaklijnen door het punt $P(2, 1)$ gaan.



Figuur 5

Antwoord

In de figuur raakt raaklijn l de grafiek als de helling van die lijn gelijk is aan de helling van de grafiek in dat punt (de afgeleide dus) van de functie f.
Het raakpunt is $(x, f(x))$, dus:

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - 1}{x - 2} = f'(x)$

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ en $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ geeft:

$\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

Na beide zijden met $x - 2$ vermenigvuldigen krijg je:

$x + \frac{1}{x} - 1 = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)(x - 2)$

Dit geeft: $1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} = 0$ en $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Er zijn dus twee mogelijke oplossingen: $x_A = -1 + \sqrt{3}$ en $x_B = -1 - \sqrt{3}$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 3**.
Er zijn dus blijkbaar twee punten A en B op de grafiek van f die een raaklijn hebben die door punt P gaan.

a Ga na dat er door het punt $P(2, 1)$ inderdaad twee lijnen gaan die de functie $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ergens raken.

b Geef de vergelijkingen van de raaklijnen.

Je had dit probleem ook anders kunnen aanpakken, bijvoorbeeld door het punt A variabele coördinaten te geven: $A\left(a, a + \frac{1}{a}\right)$.

c Leg uit dat dan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn door A gelijk is aan $1 - \frac{1}{a^2}$.

d Stel nu de vergelijking van de raaklijn door A met die richtingscoëfficiënt op.

e Bereken ten slotte de twee mogelijke waarden voor a door gebruik te maken van het gegeven dat de raaklijn door $P(2,1)$ moet gaan.

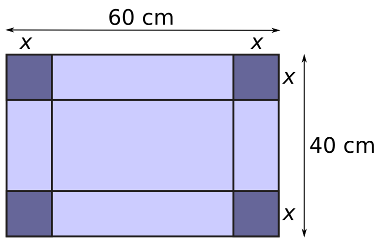
Opgave 5

Gegeven zijn de functies f en g door $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$.
De lijn $x = p$ met $0 < p < 1$ snijdt beide grafieken in de punten A en B. Voor welke waarde van p is de lengte van lijnstuk AB maximaal?

Verwerken

Opgave 6

Een fabrikant van balkvormige dozen maakt dozen van karton. Voor het maken van een doos (zonder deksel) gebruikt hij karton met een afmeting van 40×60 cm.



Figuur 6

a Neem aan dat x de hoogte van de doos is en bepaal welke maximale en minimale waarde x heeft.

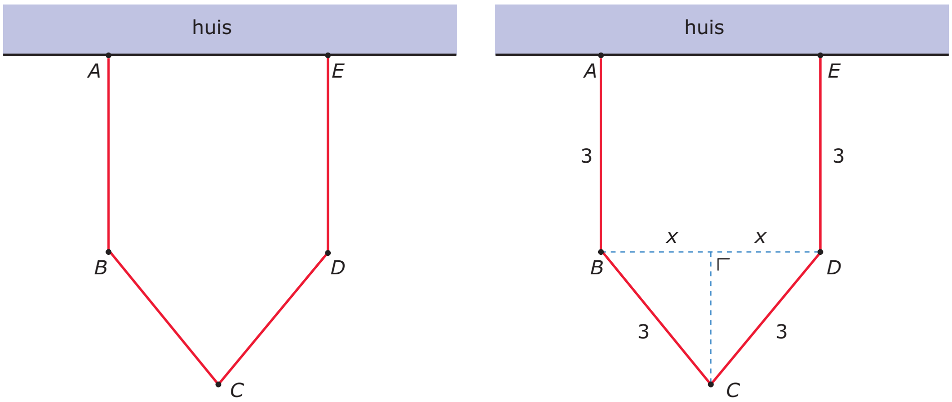
b Druk de oppervlakte A en de inhoud I van de doos uit in x.

c Bereken met behulp van differentiëren bij welke hoogte (mm) de doos de grootste inhoud heeft.

d Bereken de maximale inhoud van de doos (cm^3) en de afmetingen (mm) die daarbij horen.

Opgave 7

Iemand wil met behulp van een viertal even grote rechthoekige kozijnen een serre aan zijn huis bouwen. Elk van die kozijnen is 2,5 m hoog en 3 m breed. Hij bestudeert de mogelijke opstellingen waarbij twee kozijnen AB en DE loodrecht op de muur worden bevestigd. De andere twee BC en CD worden zo geplaatst dat de vloeroppervlakte van de serre maximaal wordt.



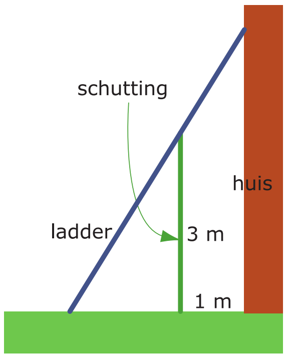
Figuur 7

a De afstand tussen de twee kozijnen die loodrecht op de muur staan is $2x$. Toon aan dat voor de vloeroppervlakte A van de serre geldt: $A(x) = 6x + x\sqrt{9 - x^2}$.

b Bereken algebraïsch de grootst mogelijke vloeroppervlakte van deze serre.

Opgave 8

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 m van de muur staat echter een schutting van 3 m hoog. Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen?
(Ga er van uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staan.)



Figuur 8

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = \frac{100x^2-400}{x^4+100}$.

a Bereken algebraïsch het bereik van f. Geef benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

b Los algebraïsch op: $f(x) \leq \frac{1}{f(x)}$.

c De lijn $y = ax$ raakt de grafiek van f. Bereken a.

Opgave 10

Gegeven is de familie van functies f_p door $f_p(x) = \frac{x^2+px+4}{x+3}$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en de extremen van f_4.

b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f_p geen verticale asymptoot?

c Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f_p geen nulpunten?

d Voor welke waarden van p heeft f_p geen extremen?

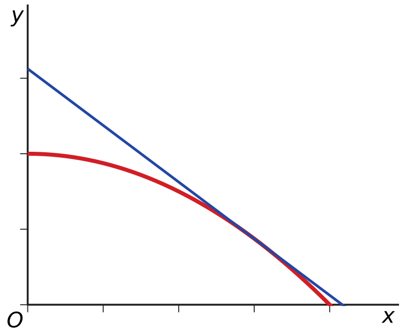
e Voor welke waarden van p gaat de raaklijn aan de grafiek van f_p voor $x = 0$ door het punt $\left(9, \frac{1}{3}\right)$?

Opgave 11

Een metalen boog in de vorm van een halve bergparabool is op 4 m hoogte tegen een hoge muur bevestigd en raakt de grond op een afstand van 2 m van de muur.

Tegen de metalen constructie wordt een rechte plank gezet die zowel de grond, de halve paraboolboog als de muur raakt.

In een wiskundig model van de situatie waarbij de diktes van de boog en de plank verwaarloosd zijn is een assenstelsel aangebracht met de x-as als de grond en de y-as als de muur.
Voor de boog geldt $y = 4 - x^2$.



Figuur 9

a Stel de plank raakt de boog in het punt P met $x_P = p$.

Toon aan dat de plank dan de grond raakt in het punt $\left(\frac{2}{p} + \frac{1}{2}p, 0\right)$.

b De plank vormt met de grond en de muur een driehoek.

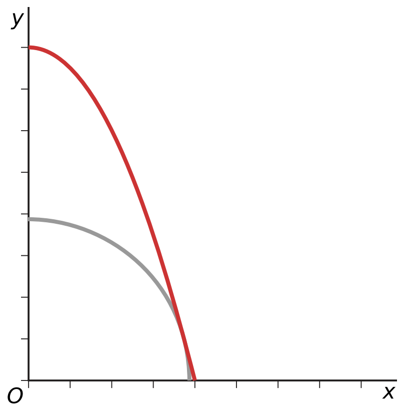
Toon aan dat voor de oppervlakte van die driehoek als functie van de x-coördinaat van het raakpunt P geldt: $A(p) = \frac{(4+p^2)^2}{4p}$ en bereken algebraïsch de minimale oppervlakte van die driehoek.

c Bereken de lengte van de kortste plank die zowel de grond, de boog en de muur raakt. Geef je antwoord in centimeter.

Onder de halve paraboolboog wordt een metalen kwart cirkelboog gemaakt die de oorsprong als middelpunt heeft en de paraboolboog raakt.

De diktes van de bogen kun je verwaarlozen.

d Bereken exact de straal van de cirkelboog.

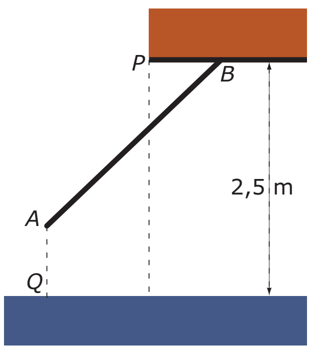


Figuur 10

Testen

Opgave 12

Hier zie je een bewegende garagedeur. De hoogte van punt A (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van PB.
Bereken algebraïsch hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 11

Opgave 13

Gegeven is de functie f met $f(x) = \left(x^2 - x\right)^4$.

a Bepaal algebraïsch de extremen van f.

b De lijn met vergelijking $x = k$ met $0 < k < 1$ snijdt de x-as in A en de grafiek van f in B. Voor welke waarde van k is de oppervlakte van ΔOAB maximaal?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.