3.5 Differentieerbaarheid

Inleiding

Je kent nu de meest gebruikte differentieerregels. Het lijkt er op dat je alle functies zonder problemen kunt differentiëren. Dat is echter niet het geval. Er bestaan functies waarbij zelfs binnen het domein problemen optreden met de afgeleide.

In dit onderdeel kom je daar een aantal voorbeelden van tegen. Het gaat dan om sprongen en knikken in de grafiek.

Je leert in dit onderwerp

- herkennen wanneer en waar een bepaalde functie (zelfs binnen zijn domein) geen afgeleide heeft;
- werken met de afgeleide in de buurt van knikpunten en sprongen in de grafiek.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van $y = \sqrt{x}$ op je grafische rekenmachine.

a Probeer je grafische rekenmachine het hellingsgetal voor $x = 0$ laten vinden.

b Welk probleem doet zich daarbij voor? Kun je er een verklaring voor vinden?

c Heeft deze grafiek een raaklijn voor $x = 0$? Zo ja, welke vergelijking hoort er dan bij die raaklijn?

Uitleg

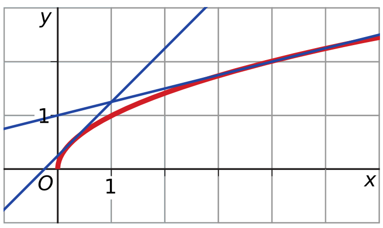
Bekijk de applet

Het domein van de grafiek van de wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$ is $[0, \rightarrow\rangle$. Het randpunt (0,0) is een punt van de grafiek van f.

De afgeleide is: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Hier heeft $f'(0)$ geen betekenis, want je deelt dan door 0 en dat kan niet.

Dit betekent dat deze wortelfunctie niet differentieerbaar is voor $x = 0$. Ook de meeste andere wortelfuncties kennen waarden waarin de functie niet differentieerbaar is.



Figuur 1

Als je $x = 0$ in de grafiek van f van de bovenkant benadert, dan wordt de helling steeds groter. In $O(0,0)$ is de helling oneindig groot. De grafiek heeft in dat punt een verticale raaklijn met vergelijking $x = 0$.

Er zijn verschillende situaties denkbaar waarbij een functie voor een bepaalde waarde van x geen afgeleide heeft hoewel die waarde wel tot het domein behoort. Vaak is dat zichtbaar aan een knik of een sprong in de grafiek. Op plaatsen waarin een knik of een sprong optreedt, kan niet precies één raaklijn aan de grafiek getekend worden. Ook randpunten van de grafiek kunnen een onbepaalde helling hebben.

Opgave 1

De functie $f(x) = \sqrt{x}$ is niet differentieerbaar voor $x = 0$.

a Wat betekent dit?

b Voor welke waarde van x is de functie g met $g(x) = 2 + \sqrt{x-3}$ niet differentieerbaar?

c Welke vergelijking heeft de raaklijn aan de grafiek van g voor de in b bedoelde waarde van x?

Opgave 2

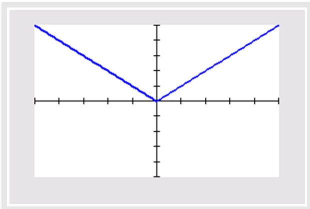
Gegeven is f met $f(x) = |x|$ met $-5 \leq x \leq 5$.

a Welke helling heeft de grafiek van f voor $x < 0$?

b Welke helling heeft de grafiek van f voor $x > 0$?

c Waarom is de grafiek van f voor $x = 0$ niet differentieerbaar?

d Is de functie $g(x) = \left|x^3\right|$ voor $x = 0$ differentieerbaar?



Figuur 2

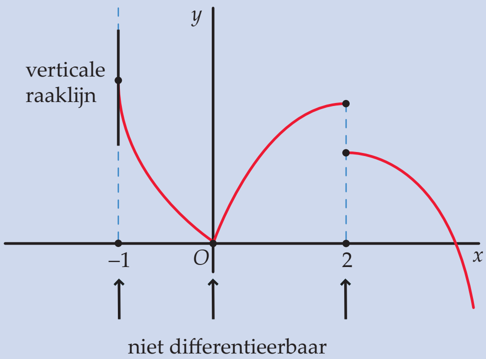
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een functie f is **differentieerbaar** voor $x = a$ als a tot het domein van f behoort en

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

bestaat. Belangrijk is hierbij dat h zowel positief als negatief moet kunnen zijn: het naar 0 naderen moet zowel van de negatieve als de positieve kant kunnen en hetzelfde getal opleveren.
Dat differentiaalquotiënt is dan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = a$ aan de grafiek van f. Het komt er dus op neer, dat je de functie voor $x = a$ precies één hellingsgetal moet kunnen geven en een bijpassende vergelijking van de raaklijn moet kunnen opstellen.



Figuur 3

Er zijn verschillende situaties waarin een functie **niet differentieerbaar** is, terwijl de betreffende x-waarde wel tot het domein van f behoort. Bekijk de voorbeelden. Het gaat om x-waarden waarin de grafiek

- een **verticale raaklijn**, of
- een **knikpunt**, of
- een **sprong**

vertoont. Heeft een grafiek een perforatie, dan is deze voor de bijbehorende waarde van x niet differentieerbaar.

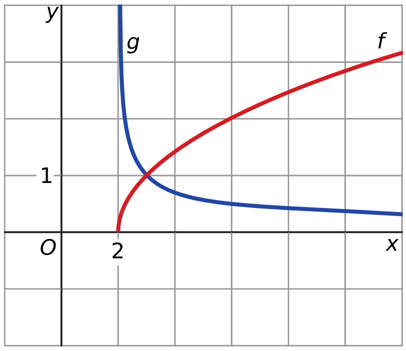
Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Bekijk de grafieken van de functies

$f(x) = \sqrt{x-2}$ en $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

Hoe zit het met de differentieerbaarheid van beide functies?



Figuur 4

Antwoord

Functie f heeft als domein $[2, \rightarrow\rangle$.

De afgeleide $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ heeft als domein $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

Naarmate je van de bovenkant dichter bij het randpunt (2,0) komt, wordt de grafiek steeds steiler. In dit punt heeft de grafiek een verticale raaklijn. De functie f is niet differentieerbaar voor $x = 2$ hoewel dit getal wel in het domein zit.

Functie g heeft als domein $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

De afgeleide $g'(x) = \frac{-1}{2(x-2)\sqrt{x-2}}$ heeft als domein ook $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

De functie g is voor elke x-waarde in het domein differentieerbaar.

Opgave 3

Bekijk de functies in **Voorbeeld 1**.

a Waarom zijn zowel f als g niet differentieerbaar voor $x = 2$?

b Waarom heeft de grafiek van f wel een raaklijn voor $x = 2$ maar de grafiek van g niet?

Opgave 4

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

a Bepaal het domein en bereik van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bepaal het domein en bereik van f'.

d Welke conclusies kun je daaruit trekken?

Opgave 5

Bekijk de grafieken van de functies: $f(x) = \left|x^2 - 4x\right|$ en $g(x) = x^2 - |4x|$.

a Voor welke waarden van x is functie f niet differentieerbaar?

b Voor welke waarden van x is functie g niet differentieerbaar?

Voorbeeld 2

Hoe zit het met de differentieerbaarheid van de functie f met $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$?

Antwoord

De functie is te schrijven als

$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3$ mits $x \neq 3$

De grafiek is daarom een rechte lijn met een perforatie bij $x = 3$.

Omdat de functiewaarde bij $x = 3$ niet bestaat, is de functie daar niet differentieerbaar.

Opgave 6

Onderzoek de differentieerbaarheid van de functies.

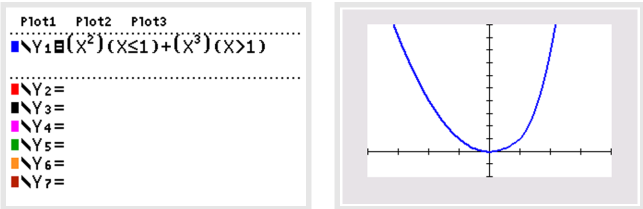
a $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

b $g(x) = \frac{|x|}{x}$

c $h(x) = \frac{|x^2+x|}{x}$

Voorbeeld 3

Soms bestaat een functie uit meerdere delen. Bijvoorbeeld: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{voor } x \leq 1 \\ x^3 & \text{voor } x > 1 \end{cases}$



Figuur 5

Laat zien dat deze functie niet differentieerbaar is voor $x = 1$.

Antwoord

De grafiek van f vertoont bij $x = 1$ geen sprong, want $f(1) = 1 = \lim\limits_{x \downarrow 1} x^3$.

De afgeleide is:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{voor } x \leq 1 \\ 3x^2 & \text{voor } x > 1 \end{cases}$$

Bekijk je nu het punt (1,1) dan zie je dat het hellingsgetal 2 is, want $f'(1) = 2$. En als je het punt (1,1) van rechts benadert dan zie je dat het hellingsgetal 3 wordt, want $\lim\limits_{x \downarrow 1} 3x^2 = 3$.

Omdat beide hellingen verschillend zijn, is er daar een knikpunt en is f niet differentieerbaar voor $x = 1$.

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{voor } x < 0 \\ x^3 & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$

Waarom is g wel differentieerbaar voor $x = 0$?

Verwerken

Opgave 8

Bepaal de punten waarin de functies niet differentieerbaar zijn.

a $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

b $g(x) = |9 - x^2|$

c $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$

d $k(x) = 2x + |x - 5|$

Opgave 9

De grafiek van de functie $f(x) = x^2|x+4|$ heeft een knikpunt bij (-4,0).
In dit knikpunt kun je twee lijnen tekenen die de grafiek van f raken. Bereken de richtingscoëfficiënten van deze twee lijnen.

Opgave 10

Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = -2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ op het domein [-1,6].

a Laat zien dat deze functie voor $x = 0$ niet differentieerbaar is.

b Bereken de extremen van deze functie.

c De raaklijn voor $x = k$ snijdt de x-as in het punt A en de y-as in het punt B zodanig dat A en B even ver van (0,0) af liggen. Bereken k.

Opgave 11

Gegeven is de functie f die is gedefinieerd door:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{voor } x < 1 \\ (x-2)^2 + 2 & \text{voor } x \geq 1 \end{cases}$$

a Laat zien dat deze functie voor elke waarde van x differentieerbaar is.

b Het functievoorschrift wordt voor $x \geq 1$ vervangen door een functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax + b$. Welke waarden moeten a en b dan hebben als de nieuwe functie f die dan ontstaat nog steeds voor elke x differentieerbaar is?

Opgave 12

Bekijk: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$.

a Voor welke waarden van x is f niet differentieerbaar?

b Bereken $\lim_{x \uparrow -2} f'(x)$ en $\lim_{x \downarrow -2} f'(x)$.
Welke betekenis heeft dit voor de grafiek van f?

Toepassen

Opgave 13: Startende fietser

Een fietser versnelt de eerste vijf seconden met een versnelling van 1 m/s^2 en rijdt daarna met een constante snelheid verder.

Voor zijn afgelegde weg s geldt $s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{voor } 0 \leq t < 5 \\ 5t - 12{,}5 & \text{voor } t \geq 5 \end{cases}$

a Laat zien, dat de grafiek van $s(t)$ aaneengesloten is.

b Laat zien, dat ook de grafiek van de snelheid $v(t) = s'(t)$ aaneengesloten is.

c En hoe ziet de grafiek van de versnelling $a(t) = s''(t)$ er uit?
Hoe merkt de fietser dat?

Testen

Opgave 14

Bepaal de waarden van x waarin de volgende functies niet differentieerbaar zijn.

a $f(x) = 4 - \sqrt{2-x}$

b $g(x) = x\left|x^2 - 4\right|$

Opgave 15

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^3}$.

a Bepaal het domein van f.

b Voor welke waarden van x is f niet differentieerbaar?

c Bereken de extremen van f.