3.4 De quotiëntregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ deelt, krijg je een nieuwe functie die de quotiëntfunctie van f en g heet. Soms kun je die quotiënten uitwerken, maar meestal niet.

Daarom moet je een differentieerregel hebben voor quotiëntfuncties $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Je leert in dit onderwerp

- de regel voor het differentiëren van quotiëntfuncties gebruiken.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel, de kettingregel en de productregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Een gebroken functie (quotiëntfunctie) heeft de vorm $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$. Je kunt alle quotiëntfuncties schrijven als een product van twee machtsfuncties: $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$.

a Bepaal de afgeleide van $q(x) = \frac{x+3}{x+2}$ door de functie eerst als een product van twee machtsfuncties te schrijven. Schrijf je antwoord als één breuk.

b Bepaal op dezelfde manier de afgeleide van de algemene quotiëntfunctie $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Schrijf je antwoord als één breuk.

Uitleg

Als een deling niet uitkomt, blijft er een breuk over. Ook bij functies kan dit voorkomen.

- $f(x) = \frac{3x^5}{2x^2}$ is een deling van $t(x) = 3x^5$ en $n(x) = 2x^2$.
  Deze deling is echter te vereenvoudigen (mits $x \neq 0$) tot $f(x) = 1{,}5x^3$
- $g(x) = \frac{x+1}{x}$ is een deling van $t(x) = x + 1$ en $n(x) = x$.
  Deze breuk kun je gemakkelijk uitdelen waarbij de vorm $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ontstaat.
- $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ is een deling van $t(x) = x$ en $n(x) = x^2 + 1$.
  Deze functie kun je niet vereenvoudigen of uitdelen.

De functies f en g kun je na vereenvoudigen en/of uitdelen differentiëren.

Bij functie h kun je de afgeleide vinden door de functie als een product van twee machtsfuncties te schrijven: $h(x) = x \cdot \left(x^2 + 1\right)^{-1}$.

Je vindt de afgeleide met de productregel en de kettingregel:

$h'(x) = 1 \cdot \left(x^2 + 1\right)^{-1} + x \cdot -1 \cdot \left(x^2 + 1\right)^{-2} \cdot 2x$, dus:

$h'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

Je ziet dus dat ook een gebroken functie te differentiëren is. Je krijgt op deze manier een vorm met twee breuken, die je weer kunt samenvoegen tot één breuk. Er bestaat echter ook een quotiëntregel voor het differentiëren:

Als $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dan is $q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Deze regel geeft de afgeleide direct in een vorm met één breuk.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Bepaal de afgeleides van f en g

b Bepaal de afgeleide van h op dezelfde manier als in de uitleg.
Schrijf het antwoord als één breuk.

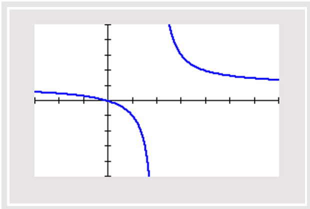
c Bepaal de afgeleide van h met behulp van de quotiëntregel.

Opgave 2

Hier zie je een deel van de grafiek van de functie $q(x) = \frac{x}{x-2}$.

a Bepaal de afgeleide van $q(x) = \frac{x}{x-2}$ met de quotiëntregel.

b Ga na dat je met de product- en kettingregel op hetzelfde antwoord uitkomt.



Figuur 1

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een quotiënt van twee functies geldt de **quotiëntregel**:

De afgeleide van $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ is $q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Bewijs 1

Je kunt $q(x)$ schrijven als $q(x) = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$.

Differentiëren van deze functie met de productregel en de kettingregel geeft dan:

$q'(x) = f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot -1 \cdot (g(x))^{-2} \cdot g'(x)$, dus:

$q'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

De breuken gelijknamig maken en het geheel vervolgens als één breuk schrijven, levert de quotiëntregel:

$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x)}{(g(x))^2} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

De quotiëntregel geeft best veel rekenwerk. Kijk goed of deze regel wel echt noodzakelijk is. Vaak kun je een quotiëntfunctie vereenvoudigen of uitdelen, wat het differentiëren eenvoudiger maakt.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $p(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Differentieer $p(x)$ met behulp van de quotiëntregel.

Antwoord

Voor de afgeleide van een quotiëntfunctie $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ geldt de quotiëntregel:

$p'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

In dit geval geldt:

- teller: $f(x) = x^2$ met $f'(x) = 2x$
- noemer: $g(x) = x - 1$ met $g'(x) = 1$

Dus de gevraagde afgeleide is: $p'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

a Bepaal van deze functie de afgeleide met behulp van de quotiëntregel.

b Je kunt ook het functievoorschrift eerst herleiden. Dan hoef je de quotiëntregel helemaal niet te gebruiken. Bepaal nu de afgeleide zonder de quotiëntregel toe te passen. Welk van beide methodes om te differentiëren is hier het handigst?

Opgave 4

Differentieer de functies. Ga daarbij eerst na of het gebruik van de quotiëntregel echt noodzakelijk is of dat je de functie beter eerst kunt vereenvoudigen of uitdelen voordat je gaat differentiëren.

a $f(x) = \frac{x+4}{x}$

b $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$

c $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$

d $f(x) = \frac{x}{x+3}$

e $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$

f $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

Voorbeeld 2

Differentieer de functie: $f(x) = \frac{5x-10}{\sqrt{4+x^2}}$.

Antwoord

Noem de teller $t(x)$ en de noemer $n(x)$ en pas de quotiëntregel toe:

- $t(x) = 5x - 10$ met $t'(x) = 5$
- $n(x) = \sqrt{4 + x^2} = \left(4 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ met $n'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

Dus: $f'(x) = \frac{5 \cdot \sqrt{4+x^2} - (5x-10) \cdot \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2}$

Vermenigvuldig nu teller en noemer met $\sqrt{4 + x^2}$ om de breuk uit de teller te halen en je vindt:

$f'(x) = \frac{5 \cdot (4+x^2) - (5x-10) \cdot x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{20+10x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

Opgave 5

Differentieer de functies. Gebruik de quotiëntregel alleen als het niet makkelijker kan.

a $f(x) = \frac{3x^2-4}{2x+1}$

b $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$

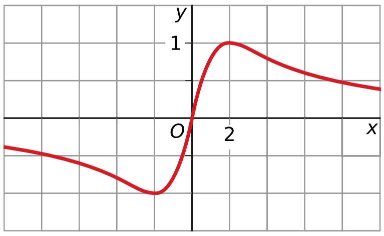
c $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{4+x^2}}$

d $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Voorbeeld 3

Bekijk het deel van de grafiek van $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.

Er zijn twee extremen. Bereken die met behulp van de afgeleide van f.



Figuur 2

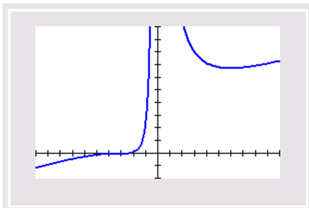
Antwoord

De afgeleide is: $f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2+4) - 4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.

$f'(x) = 0$ geeft $-4x^2 + 16 = 0$.
En deze vergelijking levert op: $x = -2 \vee x = 2$.
Uit de grafiek kun je dan aflezen dat de extremen zijn: max. $f(2) = 1$ en min. $f(-2) = -1$.

Opgave 6

Je ziet hier een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{(x+3)^3}{3x^2}$.


Figuur 3

a Toon aan dat $f'(x) = \frac{(x-6)(x+3)^2}{3x^3}$.

b Bereken het minimum van f.

c Waarom is het punt $(-3,0)$ een buigpunt van de grafiek van f?

Verwerken

Opgave 7

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \frac{x+1}{x^2-16x}$

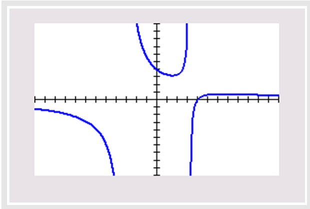
b $f(x) = \frac{x^2-10}{2x}$

c $f(x) = \frac{2x}{x^2-10}$

d $f(x) = \frac{-4}{1-3x^2}$

Opgave 8

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \frac{10x-40}{x^2-10}$.



Figuur 4

a Bereken exact de extremen van f.

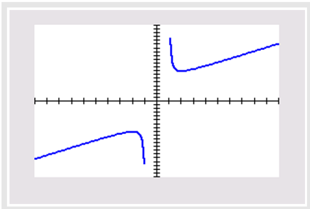
b Los op: $\frac{10x-40}{x^2-10} = -x + 4$.
Wat heeft de oplossing voor betekenis voor de grafiek van f?

Opgave 9

Toon aan dat de afgeleide van $f(x) = \frac{x+3}{x\sqrt{1-2x}}$ gelijk is aan $f'(x) = \frac{x^2+9x-3}{(x^2-3x^3)\sqrt{1-2x}}$

Opgave 10

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-1}} + x$ met $x > 1$.



Figuur 5

a Toon aan dat geldt:

$f'(x) = \frac{-3\sqrt{3}}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} + 1$

b Bereken exact het minimum.

c Er is een punt A op f met raaklijn $l: y = f'(x_A)x + b$, waarvoor geldt dat $f(x_A) = x_A + \frac{1}{2}b$.
Bereken de coördinaten van A.

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{10}{\sqrt{x^2+2}}$.

Voor welke waarde van x is de stijging maximaal?

Toepassen

Opgave 12: Gelijkstroomcircuit

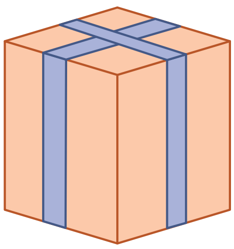
Een gelijkstroomcircuit bestaat uit een 12 volts batterij met een inwendige weerstand van 12 ohm en een variabele weerstand van R (ohm). Het vermogen P (in watt) dat door dit circuit wordt opgewekt, wordt gegeven door $P = RI^2$. De stroomsterkte I wordt daarin gegeven door $I = \frac{12}{R+12}$.

a Druk het ontwikkelde vermogen uit in R, de variabele weerstand.

b Bereken het maximaal ontwikkelde vermogen met behulp van differentiëren.

Opgave 13: Sierlinten

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte vier keer zo groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.



Figuur 6

a Stel een formule op voor de lengte L van het benodigde sierlint als functie van de breedte x van de doos.

b Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

Testen

Opgave 14

Differentieer de volgende functies zo handig mogelijk.

a $f(x) = \frac{2x+5}{1-x}$

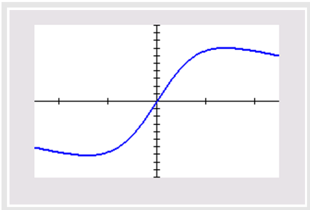
b $f(x) = \frac{\pi}{3(1+x^3)}$

c $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

d $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}$

Opgave 15

Dit is een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{10x}{0{,}5x^2+1}$.



Figuur 7

a Bereken exact de twee extremen van functie f.

b Bepaal de tweede afgeleide van f.

c Bepaal de buigpunten van de grafiek van f.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met alle differentieerregels**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.