3.3 De productregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ vermenigvuldigt, krijg je een nieuwe functie die de productfunctie van f en g heet. Vaak kun je die producten uitwerken, maar niet altijd. En soms is dit gewoon te bewerkelijk.
Daarom moet je een differentieerregel hebben voor productfuncties $f(x) \cdot g(x)$.

Je leert in dit onderwerp

- de regel voor het differentiëren van productfuncties gebruiken.

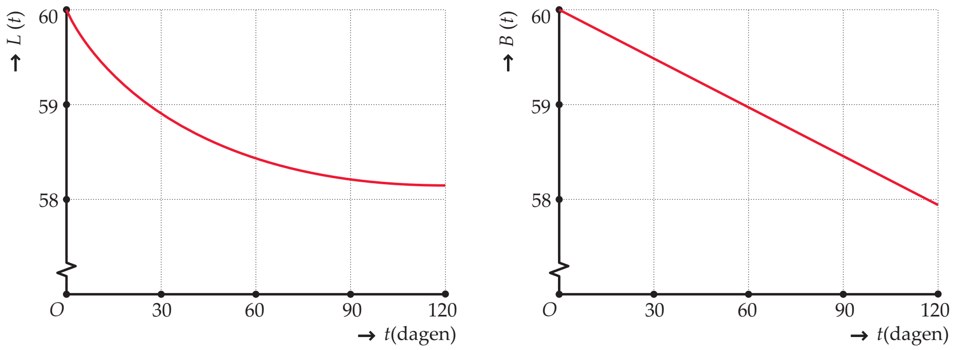
Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel en de kettingregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In deze grafieken zie je hoe de lengte L en de breedte B van een plank van 60 cm bij 60 cm in de loop van de tijd veranderen.



Figuur 1

a In welke periode krimpt de plank in de lengte sneller dan in de breedte?

b Op $t = 0$ is de plank vierkant. Tijdens het krimpen verandert de verhouding tussen lengte en breedte. Na hoeveel dagen is de plank opnieuw ongeveer vierkant?

c Op $t = 90$ is de lengte van de plank 58,3 cm en de breedte van de plank 58,5 cm. De plank krimpt dan in de lengte met 0,007 cm per dag en in de breedte met 0,017 cm per dag. Met hoeveel cm^2 per dag verandert de oppervlakte dan?

Uitleg

Met behulp van eenvoudige functies kun je gemakkelijk nagaan dat voor het product van twee functies geen voor de hand liggende regels gelden:

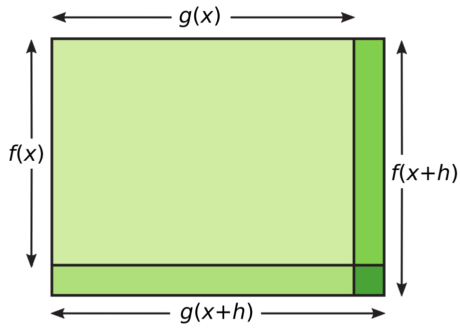
- Als $f(x) = 3x$ dan is $f'(x) = 3$.
- Als $g(x) = x^2$ dan is $g'(x) = 2x$.

De productfunctie van f en g is dan: $P(x) = f(x) \cdot g(x) = 3x \cdot x^2 = 3x^3$. De afgeleide daarvan is $P'(x) = 9x^2$ en niet $P'(x) = f'(x) \cdot g'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$, zoals je zou kunnen denken. Voor productfuncties geldt een speciale regel: de productregel.

Bekijk de figuur. Als lengte en breedte van een rechthoek functies van x zijn, is de oppervlakte $A(x)$ zo'n productfunctie: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$.

De afgeleide van $A(x)$ is volgens de definitie:

$A'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$.



Figuur 2

Als x toeneemt tot $x+h$ dan is de toename van de oppervlakte:

$A(x+h) - A(x) =$

$= f(x) \cdot (g(x+h) - g(x)) + g(x) \cdot (f(x+h) - f(x)) + (f(x+h) - f(x)) \cdot (g(x+h) - g(x))$

Dus is

$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + (f(x+h) - f(x)) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Neem je de limiet voor $h \to 0$, dan krijg je:

$A'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + (f(x+h) - f(x)) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$

$= f(x) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + 0 = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$.

Voor de gegeven functie $P(x) = f(x) \cdot g(x) = 3x \cdot x^2$ betekent dit:

$P'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) = 3x \cdot 2x + x^2 \cdot 3 = 9x^2$.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Leg aan de hand van de figuur de formule voor $A(x+h) - A(x)$ uit.

b Bij het berekenen van $A'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ wordt gesteld dat

$\lim\limits_{h \to 0} \left((f(x+h) - f(x)) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = 0$. Waarom is dat zo?

c Welke formule geldt dus voor de afgeleide van $A(x) = f(x) \cdot g(x)$?

d Neem $A(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot x^3$.
Bereken de afgeleide met de regel die je in de uitleg hebt gevonden en controleer het antwoord door eerst de functie te herleiden.

Opgave 2

De functie $A(x) = x^2(x^3 - 4x)$ kun je opvatten als een productfunctie van f en g. Bij het differentiëren kun je de regel aan het einde van de **Uitleg** gebruiken.

a Bepaal de afgeleide van A met behulp van die regel.

b Differentieer de functie ook door eerst de haakjes weg te werken.

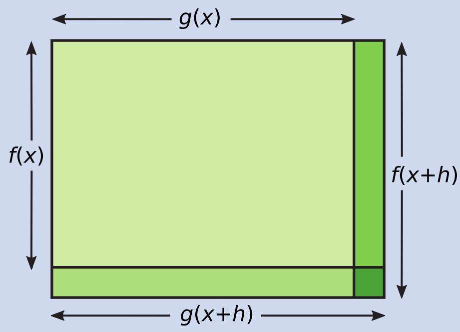
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de **productregel**:
Als
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$
dan geldt
$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Bekijk vóór je deze regel gaat gebruiken of je bijvoorbeeld een product van machtsfuncties gaat differentiëren en of je dan de haakjes kunt wegwerken. Dat kan je werk besparen.

Bewijs 1



Figuur 3

Bekijk de figuur.

Als lengte en breedte van een rechthoek functies van x zijn, is de oppervlakte A een productfunctie in x: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Je kunt de oppervlakte van deze rechthoek vergroten door x te laten toenemen met Δx.

De nieuwe oppervlakte is dan in de lengte vergroot met $\Delta f(x)$ en in de breedte met $\Delta g(x)$.

De toename van de oppervlakte bestaat uit de donkerder rechthoekjes met een oppervlakte van respectievelijk: $f(x) \cdot \Delta g(x)$, $g(x) \cdot \Delta f(x)$ en $\Delta f(x) \cdot \Delta g(x)$.

De gemiddelde toename van deze oppervlakte is:
$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) \cdot \Delta g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x) + \Delta f(x) \cdot \Delta g(x)}{\Delta x} = f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \Delta f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$

Op het interval $[x, x+h]$ wordt dit differentiequotiënt:
$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + (f(x+h) - f(x)) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

De limiet van $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ voor h naar 0 is gelijk aan $A'(x)$:

$A'(x) = \lim_{h \to 0} \left(f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + (f(x+h) - f(x)) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right)$
$A'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) + 0 \cdot g'(x)$
Daarmee wordt de afgeleide van $A(x)$: $A'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $P(x) = \left(x^3 - 6x^2\right)\left(x^4 - 1\right)$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $f(x) = x^3 - 6x^2$ waarvoor geldt: $f'(x) = 3x^2 - 12x$
- $g(x) = x^4 - 1$ waarvoor geldt: $g'(x) = 4x^3$

De afgeleide van P vind je door de productregel toe te passen:
$P'(x) = \left(x^3 - 6x^2\right) \cdot 4x^3 + \left(3x^2 - 12x\right) \cdot \left(x^4 - 1\right)$
En na haakjes wegwerken: $P'(x) = 7x^6 - 36x^5 - 3x^2 + 12x$.
Hier had je de productregel kunnen vermijden door direct de haakjes van functie P weg te werken.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je bij het differentiëren de productregel kunt gebruiken.

a Bepaal zo de afgeleide van: $P(x) = (x^3 + 4)(0{,}5x^4 - 4x)$

b Bepaal met de productregel de afgeleide van: $f(x) = 3x^4(6x^2 - 2x^3)$

c Zowel bij a als bij b heb je de productregel niet nodig voor het differentiëren. Waarom niet?

d Bepaal de afgeleide van $g(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x + 1}$.

Opgave 4

Differentieer de productfunctie: $P(x) = (x^2 + 5)(x + 10)^3$

a Bepaal de afgeleide van $P(x)$ met behulp van de productregel.

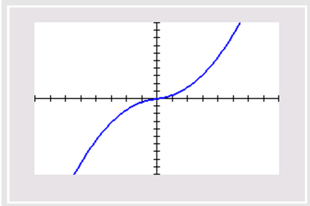
b Om de extremen te vinden dien je eerst de afgeleide van P gelijk te stellen aan 0 en uit te rekenen welke oplossingen voor x dit geeft.

Waarom moet je daarbij vooral niet de nog aanwezige haakjes helemaal weg gaan werken?

c Bereken de extremen van P.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$.
Bereken met behulp van differentiëren de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 0$.



Figuur 4

Antwoord

De afgeleide vind je met behulp van de productregel en de kettingregel:

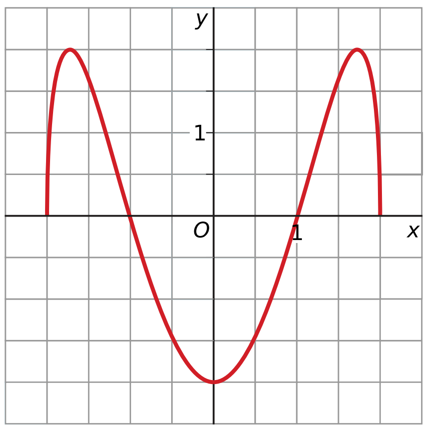
$$f(x) = x \cdot (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = x \cdot \tfrac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1 + x^2} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = 0$ is $f'(0) = 1$.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \sqrt{4 - x^2}$. Bekijk de volledige grafiek van deze functie in een cartesisch assenstelsel.



Figuur 5

a Bepaal de afgeleide van deze functie. Schrijf je antwoord als één breuk.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c De grafiek van f gaat door het punt $(1{,}0)$.
Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dit punt aan de grafiek.

Verwerken

Opgave 6

Bepaal van de functies de afgeleide. Bedenk altijd eerst of de productregel wel de meest handige manier is om de afgeleide te bepalen.
Schrijf je antwoord zo mogelijk als een product.

a $f(x) = \left(x^2 - 4\right)(x + 3)$

b $f(x) = 4\left(x^2 - x\right)^3$

c $f(x) = 3x(x + 5)^4$

d $f(x) = -10x\sqrt{x + 1}$

e $f(x) = -2x^3\left(4x + x^2\right)^2$

f $f(x) = -x\sqrt{5 + x^2}$

Opgave 7

Bekijk de grafieken van de functies $y_1(x) = x^2$ en $y_2(x) = (x - 4)^4$.
De functie $f(x) = y_1(x) \cdot y_2(x)$ is de productfunctie van beide.

a De nulpunten van f kun je uit de gegeven grafieken afleiden. Welke nulpunten heeft de grafiek van f?

b Toon aan dat $f'(x) = \left(6x^2 - 8x\right)(x - 4)^3$

c Bepaal met behulp van de afgeleide de extremen van f.

d Voor welke waarden van k heeft de vergelijking $f(x) = k$ precies vier oplossingen?

e De grafiek van f heeft twee buigpunten. Bereken de x-coördinaten van de buigpunten.

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 4x\sqrt{x} \cdot \left(1 - x^3\right)$.

a Voor welke waarden van x heeft de grafiek een raaklijn evenwijdig aan de x-as?

b Deze functie heeft twee extremen. Welke twee?

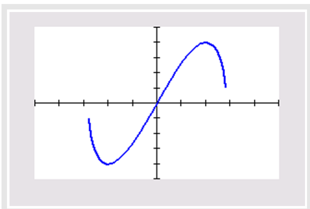
Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$ op de grafische rekenmachine.

a De grafiek is onvolledig. Dat kun je bijvoorbeeld zien aan de nulpunten van deze functie. Welke nulpunten heeft de grafiek van f?

b Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.

c Bereken voor welke waarden van p de lijn met vergelijking $y = px$ drie punten gemeen heeft met de grafiek van f.



Figuur 6

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = \left(x^2 - 100\right)^4$.
Bereken de buigpunten van deze functie.

Toepassen

In een cartesisch assenstelsel kun je de **hoek berekenen** die een lijn met de x-as of de y-as maakt. Als de lijn een richtingscoëfficiënt a heeft en α is de hoek met de positieve x-as, dan is:

$\tan(\alpha) = a$

Denk er wel om dat het assenstelsel cartesisch moet zijn, dus op de x-as en op de y-as dezelfde schaalverdeling moet hebben.

Opgave 11

Gegeven is in een cartesisch assenstelsel de grafiek van de functie $f(x) = (x-3)^2(x+1)^2$.

a Bereken de hoek die de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ met de x-as maakt.

b Bereken de hoek die de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt met de y-as, met de y-as maakt.

Opgave 12

Gegeven is in een cartesisch assenstelsel de grafiek van de functie: $f(x) = x(2x+3)^2$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt met de y-as.

b Bereken de helling van de raaklijn in het snijpunt met de y-as.

c De lijn $l: y = ax + b$ snijdt de grafiek in het snijpunt met de verticale as loodrecht. Bereken a en b.

Testen

Opgave 13

Bepaal de afgeleide van de volgende functies. Schrijf je antwoord zo mogelijk als één product of als één breuk:

a $f(x) = 6x\left(1+x^2\right)^3$

b $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$

c $f(x) = (4x-1)\sqrt{4x-1}$

d $f(x) = x(1+x)^3\sqrt{x-1}$

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x$.

a Bepaal de nulwaarden van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c Bereken algebraïsch het buigpunt van de grafiek van f.

d De raaklijn l in de oorsprong aan de grafiek van f wordt a eenheden in de positieve x-richting verschoven. De nieuwe lijn m die daardoor ontstaat raakt ook aan de grafiek van f. Bereken a.