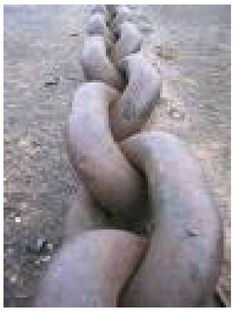
3.2 De kettingregel

Inleiding



Figuur 1

In veel functievoorschriften komen haakjes voor. Vaak kun je die eenvoudig uitwerken, maar niet altijd.
Met name bij samengestelde functies, zeg maar functies die als een ketting aan elkaar zijn geschakeld, is het uitwerken van haakjes vaak helemaal niet eenvoudig, of zelfs gewoon onmogelijk. Het differentiëren van dergelijke functies vereist een speciale differentieerregel.

Je leert in dit onderwerp

- de kettingregel voor het differentiëren van samengestelde functies;
- de kettingregel toepassen.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de functie $f(x) = (2x + 10)^3$.

a Laat zien hoe je van deze functie met behulp van transformaties de afgeleide bepaalt.

Bekijk de functie $f(x) = \left(x^2 + 10\right)^3$.

b Kun je van deze functie met behulp van transformaties de afgeleide bepalen?

c Kun je deze functie differentiëren? En hoe dan?

Uitleg 1

In functievoorschriften kunnen haakjes voorkomen. Bij functies die als een ketting aan elkaar zijn geschakeld, kan het wegwerken van haakjes lastig of zelfs onmogelijk zijn. Differentiëren volgens de nu bekende regels wordt dan ook moeilijk.

Een voorbeeld van een eenvoudige ketting van functies is: $f(x) = (2x + 10)^3$.
Je berekent een functiewaarde bij een gegeven x door eerst $g(x) = 2x + 10$ te berekenen.

$$x \xrightarrow{g(x)} 2x+10 \xrightarrow{f(g(x))} (2x+10)^3$$

Figuur 2

De functie $f(x) = (2x + 10)^3 = (g(x))^3 = f(g(x))$ is een samengestelde functie of kettingfunctie.
Zo'n functie bestaat uit een binnenste functie $g(x)$ in een buitenste functie: $f(g(x))$.
Deze kettingfunctie kun je nu al differentiëren door met transformaties te werken:

De basisfunctie waaruit f ontstaan is, is $y = x^3$ met $\frac{dy}{dx} = 3x^2$.

Daarom vind je voor de afgeleide van f:

$f'(x) = 3(2x + 10)^2 \cdot 2 = 6(2x + 10)^2$.

Dit gaat echter alleen maar omdat de binnenste functie $g(x) = 2x + 10$ een lineaire functie is, met andere functies lukt dat niet.

Opgave 1

Gegeven is de functie: $f(x) = 4(x-2)^3$.

a Waarom is f een samengestelde functie? Waaraan herken je dat?.

b Deze functie kun je differentiëren zonder eerst de haakjes weg te werken. Laat zien hoe.

Opgave 2

Splits de functievoorschriften in een binnenste en een buitenste functie. Van welke van deze functies kun je de afgeleide bepalen door van transformaties gebruik te maken?

a $y = -2(3x-4)^5$

b $y = 3\left(x^3+2x\right)^4$

c $y = \sqrt{x^2-1}$

d $y = \left(3-x^2\right)\sqrt{3-x^2}$

e $y = \frac{1}{2x-7}$

f $y = -\frac{4}{5(3x-2)^3}$

Uitleg 2

De functie $f(x) = 5\left(x^2+4x\right)^2$ is een voorbeeld van een kettingfunctie waarbij $f(x) = f(g(x))$.

Noem de binnenste functie $g(x) = x^2+4x = u$.
De buitenste functie is daarmee $y = f(g(x)) = f(u) = 5(u)^2$.

Je kunt nu zeggen:

- de afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = 2x+4$;
- de afgeleide van $f(u)$ is $f'(g(x)) = f'(u) = 10(u)$, want u is de variabele bij $f(u)$.

Dan geldt: $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 10(u) \cdot (2x+4) = 10\left(x^2+4x\right)(2x+4)$.

Voor de afgeleide van een samengestelde functie geldt de kettingregel:
Als $f(x) = f(g(x))$ dan is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Dit moet nog wel worden bewezen!

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = 3(-2x+5)^4$.

a Bepaal de afgeleide van f met behulp van de afgeleide van de basisfunctie waaruit f na transformaties is ontstaan.

b Bepaal de afgeleide van f met behulp van de kettingregel.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \left(2x^2+1\right)^8$. Deze functie heeft de vorm $f(x) = f(g(x)) = f(u)$ met $u = g(x)$. In **Uitleg 2** zie je hoe je zo'n functie kunt differentiëren.

a Schrijf de voorschriften van $y = f(u)$ en $u = g(x)$ op.

b Laat zien dat $f'(x) = 32x\left(2x^2+1\right)^7$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **samengestelde functie** is een functie die uit twee of meer geschakelde functies bestaat.

Voor een samengestelde functie geldt bijvoorbeeld $f(x) = f(g(x))$.

$$x \xrightarrow{g(x)} u \xrightarrow{f(u)} f(g(x))$$

Figuur 3

De afgeleide van $f(x) = f(g(x))$ is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Deze regel voor de afgeleide van een samengestelde functie heet de **kettingregel**.

Bewijs 1

Volgens de limietdefinitie van de afgeleide is $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Voor $f(x) = f(g(x))$ geldt: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$

en voor $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Uit deze laatste definitie volgt voor waarden van h dicht bij 0: $g(x+h) - g(x) \approx h \cdot g'(x)$.

En daarom: $g(x+h) \approx g(x) + h \cdot g'(x)$.

Zodat: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(g(x)+h \cdot g'(x))-f(g(x))}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(g(x)+h \cdot g'(x))-f(g(x))}{h \cdot g'(x)} \cdot g'(x)$.

Stel $h \cdot g'(x) = p$.

Als $h \to 0$, dan ook $p \to 0$ (als $g'(x)$ bestaat).

Dus $f'(x) = \lim\limits_{p \to 0} \frac{f(g(x)+p)-f(g(x))}{p} \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $S(x) = \left(x^2 + 2x\right)^4$.

Antwoord

Deze functie is een samengestelde functie: $S(x) = f(g(x)) = \left(x^2 + 2x\right)^4 = (g(x))^4$.

Noem $g(x) = u$.
Er geldt:

- $f(u) = u^4 = \left(x^2 + 2x\right)^4$ en dus $f'(u) = 4u^3 = 4\left(x^2 + 2x\right)^3$
- $u = g(x) = x^2 + 2x$ en dus $g'(x) = 2x + 2$

Hieruit volgt:

$S'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 4(u)^3 \cdot (2x+2) = 4\left(x^2 + 2x\right)^3 \cdot (2x+2) = (8x+8)\left(x^2 + 2x\right)^3$

Opgave 5

Differentieer de functies.

a $f(x) = \left(x^2 - 100\right)^4$

b $f(x) = -3\left(5 + x^3\right)^5$

c $f(x) = (1 - x)^3$

d $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 + 2x\right)^3$

Opgave 6

Soms moet je de functie eerst herleiden tot een samengestelde machtsfunctie voordat je hem kunt differentiëren. Na het differentiëren moet je de functie herleiden tot er geen gebroken en/of negatieve exponenten meer in voorkomen.

a $f(x) = \frac{5}{3-2x^2}$

b $g(x) = \frac{-1}{(x^2-2)^3}$

c $h(x) = 3\sqrt{2x + 3}$

d $j(x) = \left(x^2 + 3\right)\sqrt{x^2 + 3}$

Voorbeeld 2

Differentieer: $f(x) = -3x^2 + 2\left(x - x^3\right)^4$.

Antwoord

$f(x)$ bestaat uit de som van de termen $-3x^2$ en $2\left(x - x^3\right)^4$. Je moet dus de somregel toepassen. Voor het differentiëren van de laatste term heb je de kettingregel nodig.

Je krijgt daarom: $f'(x) = -6x + 8\left(x - x^3\right)^3 \cdot \left(1 - 3x^2\right)$.

Opgave 7

Gegeven zijn de functies: $f(x) = -2x^4$ en $g(x) = 2x^3 + 4x$.

a Schrijf het functievoorschrift op van: $h(x) = f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van h.

c Schrijf het voorschrift op van de functie $k(x) = g(f(x))$.

d Bepaal de afgeleide van k.

Opgave 8

Differentieer de functies.

a $f(x) = 4 - \left(x^3 + 2\right)^3$

b $f(x) = -2\left(x^3 - 5\right)^2 + 4x^3$

c $f(x) = -\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3+x^2}$

d $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}+1}{4-x}$

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Bereken het hellingsgetal van deze functie voor $x = 1$.

Antwoord

Voor het hellingsgetal van deze functie voor $x = 1$ moet je $f'(1)$ berekenen.

Om $f'(x)$ te bepalen moet je f eerst als een samengestelde machtsfunctie schrijven.

$f(x) = (9 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

De afgeleide van deze samengestelde functie is:

$f'(x) = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x = \frac{-x}{(9-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ en $f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ op je grafische rekenmachine.

a Geef het domein van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Opgave 10

Gegeven is functie: $f(x) = x + \frac{1}{2x-3}$.

a Plot de grafiek van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c Voor welke waarden van b heeft de vergelijking $f(x) = -x + b$ geen oplossingen?

Verwerken

Opgave 11

Differentieer de functies.

a $f(x) = 3\left(x^2 - 10\right)^4$

b $f(x) = -\left(3x + x^2\right)^5$

c $f(x) = -4\left(4x^2 - 8\right)^2 + 3x^2$

d $f(x) = 3 - \left(x - 4x^3\right)^4$

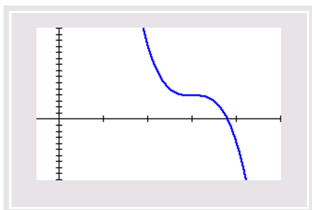
Opgave 12

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -(2x - 6)^3 + 4$.

a De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve $x = 3$.
Toon aan dat dit inderdaad het geval is.

b De grafiek van f lijkt in $x = 3$ een buigpunt te hebben.
Toon algebraïsch aan dat dat zo is.

c De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de x-as in punt P.
Bereken de coördinaten van P.



Figuur 4

Opgave 13

Differentieer de functies met behulp van de kettingregel.
Laat geen gebroken en/of negatieve exponenten in je antwoord staan.

a $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+2x^2}}$

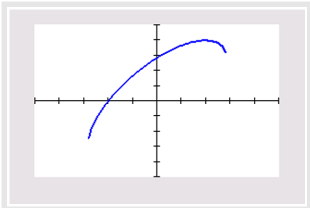
b $f(x) = -2\sqrt[3]{4x+5}$

c $f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

d $f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{3x+1}}$

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x + \sqrt{8 - x^2}$.



Figuur 5

a Bereken exact het domein van f.

b Bereken exact het bereik van f.

c Noem de randpunten van de grafiek van f respectievelijk A en B.
Voor welke waarde van x is het hellingsgetal van de grafiek van f gelijk aan dat van lijn AB?

Opgave 15

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ op je grafische rekenmachine.

a Geef het domein van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

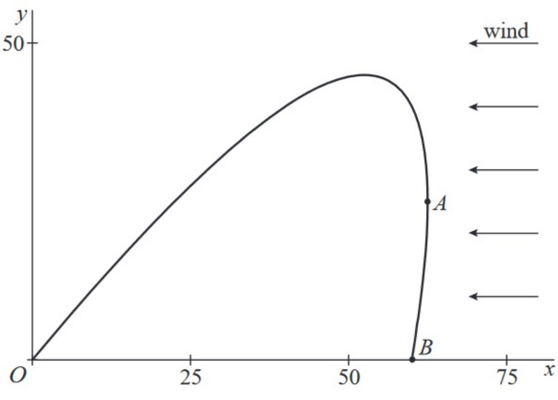
c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0{,}5$.

Toepassen

Opgave 16: Vuurpijl met tegenwind

Een vuurpijl wordt vanaf de grond schuin weggeschoten. Door tegenwind beschrijft de vuurpijl een baan zoals die in de figuur is getekend.

In deze figuur is een assenstelsel aangebracht met de x-as op de grond tegen de windrichting in en de y-as verticaal. In O wordt de vuurpijl afgeschoten. In B komt hij weer op de grond. A is het punt van de baan dat het meest naar rechts ligt. We gebruiken voor de baan de volgende formules: voor het eerste deel OA van de baan geldt $y = 2x - 100 + 4\sqrt{625 - 10x}$, voor het tweede deel AB van de baan geldt $y = 2x - 100 - 4\sqrt{625 - 10x}$, met x en y in meter.



Figuur 6

a Bereken op algebraïsche wijze de maximale hoogte die de vuurpijl bereikt.

b Bereken de x-coördinaat van A.

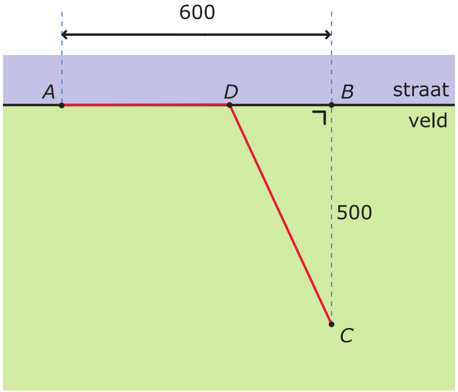
c Bereken op algebraïsche wijze op welke afstand van O de vuurpijl op de grond komt.

(bron: examen vwo wiskunde B in 2009, eerste tijdvak)

Opgave 17: Waterleiding aanleggen

Vanuit punt A moet een waterleiding gelegd worden naar punt C. Langs de straat bedragen de kosten € 30,00 per meter en door het veld € 70,00 per meter. De lengte van AB is 600 meter en de lengte van BC is 500 meter. Er zijn verschillende mogelijkheden om de waterleiding aan te leggen:

- Langs de straat tot aan punt B en vervolgens door het aangrenzende terrein naar punt C.
- Direct vanuit A door het veld, in een rechte lijn naar C.
- Een van de vele tussenmogelijkheden: de leiding wordt dan voor een gedeelte langs de straat aangelegd, tot aan punt D, en vervolgens vanaf de straat naar punt C.



Figuur 7

a Hoeveel bedragen de kosten als je voor de eerste mogelijkheid kiest?

b Hoeveel bedragen de kosten als je voor de tweede mogelijkheid kiest?

c Bekijk de derde mogelijkheid. Neem voor de lengte van BD de variabele x. Druk nu de kosten voor de aanleg van deze waterleiding uit in x.

d Hoe moet je de waterleiding aanleggen opdat de kosten minimaal zijn? Bereken de minimale kosten met behulp van de afgeleide.

Testen

Opgave 18

Differentieer de volgende functies

a $f(x) = 6\left(1 + x^2\right)^3$

b $y(x) = (1 - 4x)^4 + 5$

c $R(t) = \sqrt{\frac{15}{\pi}t}$

d $f(x) = \sqrt{10 + 4x^2}$

e $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$

f $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 19

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x+2}$.

a Als je de grafiek van deze functie op je grafische rekenmachine bekijkt met de standaardinstellingen van het venster, lijkt het wel een rechte lijn te zijn. Wat is het domein van f?

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp deze afgeleide het minimum van f.

d Bepaal het bereik van deze functie f.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de kettingregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.