3.1 Differentieerregels

Inleiding

De afgeleide van een functie geeft de helling van de grafiek in een punt weer. Het is ook een maat voor de verandering van de functiewaarde voor een bepaalde waarde van x. Je bepaalt een afgeleide door te differentiëren. Dat lijkt tot nu toe misschien een eenvoudige klus. Maar wanneer de functies ingewikkelder worden moet je er speciale **differentieerregels** voor toepassen. Je herhaalt eerst nog even de al bekende technieken en breidt de machtsregel uit.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- regels toepassen bij het differentiëren;
- de algemene machtsregel voor differentiëren gebruiken.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken, met name machtsfuncties;
- differentiëren met de machtsregel, de constanteregel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al differentiëren.
Neem de functies f en g met $f(x) = 6x^5$ en $g(x) = 2x^3$.

Bepaal zo mogelijk de afgeleide van:

a $f_1(x) = f(x) + g(x)$

b $f_2(x) = f(g(x))$

c $f_3(x) = f(x) \cdot g(x)$

d $f_4(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

e $f_5(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

Voor functie f_1 (de som of het verschil van f en g) geldt dat de afgeleide gelijk is aan de som of het verschil van de afgeleiden van f en g (de somregel).

Voor het vinden van de afgeleide van de functies f_2, f_3 en f_4 heb je de functies eerst moeten herleiden alvorens te kunnen differentiëren. Bij f_5 lukte dat daarmee waarschijnlijk (nog) niet.

f Kun je voor f_2, f_3, f_4, en f_5 een regel bedenken waarbij dat niet noodzakelijk zou zijn?

Uitleg

Met een afgeleide f' beschrijf je de veranderingen van een functie f. Je weet:

- Als $f(x) = x^3$ dan is $f'(x) = 3x^2$.
- Als $g(x) = 3x^2$ dan is $g'(x) = 6x$.

Je differentieert hier met de machtsregel. Deze regel blijkt niet alleen bij gehele positieve waarden van de exponent, maar ook bij negatieve waarden, gebroken waarden, zelfs bij alle reële waarden te gelden.

Als $f(x) = cx^r$ dan is $f'(x) = rcx^{r-1}$ voor elke c en voor elke reële waarde van r.

Om $f(x) = \frac{1}{x^2}$ te differentiëren schrijf je deze functie eerst als machtsfunctie: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$.

Door de algemene machtsregel te gebruiken vind je nu de afgeleide:
$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$
Dit kun je zonder gebroken en/of negatieve exponenten schrijven:

$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

Ook functies met wortels kun je zo differentiëren:

$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Je gebruikt bij het differentiëren van machtsfuncties de rekenregels voor machten.

Opgave 1

Schrijf de functies als één macht. Differentieer deze functies en herleid de antwoorden tot een vorm zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

a $f(x) = \frac{1}{x}$

b $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c $f(x) = \frac{3}{x^2}$

d $f(x) = x\sqrt{x}$

e $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x}}$

f $f(x) = \sqrt{4x^3}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kent al enkele **differentieerregels**, zoals:

- De **somregel**:
  Als $f(x) = u(x) + v(x)$ dan geldt: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- De **constanteregel**:
  Als $f(x) = c$ dan geldt: $f'(x) = 0$.
- De **machtsregel**:
  Als $f(x) = cx^n$ dan geldt voor elke c en voor gehele positieve n: $f'(x) = ncx^{n-1}$.

Deze laatste regel mag je uitbreiden tot:

- De **algemene machtsregel**:
  Als $f(x) = cx^r$ dan geldt voor elke c en voor elke r: $f'(x) = rcx^{r-1}$.

Een bewijs van deze regel volgt later nog.

Met de algemene machtsregel kun je ook machtsfuncties differentiëren met gebroken en/of negatieve exponenten.

Na het differentiëren zul je de afgeleide vaak weer gaan herleiden, want je laat liever geen gebroken en/of negatieve exponenten staan als je met de afgeleide nog moet rekenen.

De afgeleide kent allerlei toepassingen, zoals de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt van de grafiek aan die grafiek bepalen, of de coördinaten van de extremen berekenen en dergelijke.

Voorbeeld 1

Differentieer de functies:

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $g(x) = \frac{1}{x}$
- $h(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

Antwoord

- Eerst schrijf je f als machtsfunctie:

  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

  Vervolgens pas je de machtsregel toe en werk je de negatieve en de gebroken exponent weer weg:

  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Eerst schrijf je g als machtsfunctie:

  $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

  Vervolgens pas je de machtsregel toe en werk je negatieve exponent weer weg:

  $g'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

- Eerst schrijf je h als machtsfunctie:

  $h(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} = 3x^{-\frac{1}{2}}$

  Vervolgens pas je de machtsregel toe en werk je de negatieve en de gebroken exponent weer weg:

  $h'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$

Opgave 2

Herleid en differentieer de functies.

a $f(x) = 2x^2\sqrt{x}$

b $f(x) = 6x\sqrt[3]{x}$

c $f(x) = 1\frac{1}{2}x^2\sqrt[3]{x^2}$

d $f(x) = 3ax^3\sqrt[3]{x}$

Opgave 3

Bepaal de afgeleide (de hellingsfunctie) van de volgende functies.

a $f(x) = 6 - \frac{1}{2x^3}$

b $TK(q) = 2q^3 + 60q^2 - 100q + 50$

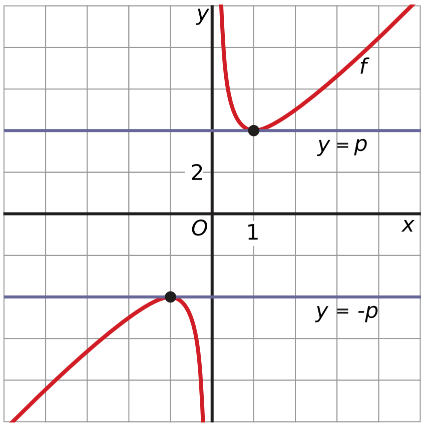
c $J(d) = \frac{1}{6}\pi d^3 + \frac{1}{d^2}$

d $f(x) = x^{-1}\left(x^2 - 20x\right)\left(x^2 + 30x\right)$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

Bereken algebraïsch voor welke waarden van p de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing heeft.



Figuur 2

Antwoord

$y = p$ is een horizontale lijn. De horizontale lijnen, die door de toppen gaan, hebben één (raak)punt met f gemeen. Daarom moet je berekenen wat de extremen zijn.

$f(x) = x + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$.

Met $f'(x) = 0$ vind je de x-coördinaten van de toppen.
Je krijgt $x = -2 \vee x = 2$.

De extremen zijn daarmee min. $f(-2) = -4$ en max. $f(2) = 4$.

Bekijk de grafiek: Voor $p = -4 \vee p = 4$ heeft $f(x) = p$ één oplossing.

Opgave 4

Gegeven is de functie: $g(x) = \frac{2}{x} + 2x$

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 2$.

c Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = p$ precies één punt met de grafiek van g gemeen?

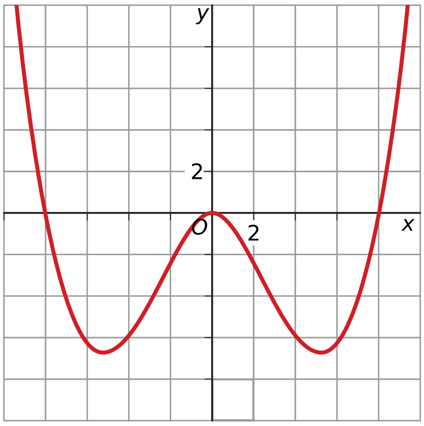
Opgave 5

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} - x^2$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ vier oplossingen?

c Bereken algebraïsch de buigpunten van f.



Figuur 3

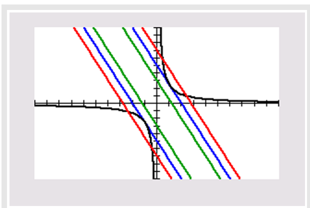
Voorbeeld 3

Bekijk de functie f met $f(x) = \frac{10}{x}$.

Voor welke waarde van b heeft de lijn $y = -2\frac{1}{2}x + b$ geen snijpunten met de grafiek van f?

Antwoord

Plot de grafiek van f en enkele lijnen met een hellingsgetal van $-2\frac{1}{2}$.



Figuur 4

Je ziet dat er enkele lijnen zijn die twee snijpunten hebben met de grafiek van f (de rode lijnen), twee blauwe lijnen die de grafiek van f in één punt raken en enkele lijnen die geen snijpunt met de grafiek van f hebben (de groene lijnen). De raaklijnen zijn de grenzen waartussen de lijnen liggen, die geen snijpunt met de grafiek van f hebben.

Je moet dus uitrekenen voor welke b de lijn $y = -2\frac{1}{2}x + b$ een raaklijn is van de grafiek van f.

Als $y = -2\frac{1}{2}x + b$ een raaklijn is van f, dan geldt $f'(x) = -2\frac{1}{2}$.

$f(x) = \frac{10}{x} = 10x^{-1}$ geeft $f'(x) = -10x^{-2} = -\frac{10}{x^2}$.

En uit $f'(x) = -\frac{10}{x^2} = -2\frac{1}{2}$ volgt $x = -2 \vee x = 2$.

De raakpunten zijn daarmee $(-2, -5)$ en $(2,5)$.

De raaklijnen zijn $y = -2\frac{1}{2}x - 10$ en $y = -2\frac{1}{2}x + 10$.

Voor $-10 < b < 10$ hebben de lijnen $y = -2\frac{1}{2}x + b$ geen snijpunten met de grafiek van f.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Laat zien hoe je $f'(x) = -2\frac{1}{2}$ oplost.

b Stel de twee vergelijkingen van de raaklijnen met richtingscoëfficiënt $-2\frac{1}{2}$ op.

c Hoe trek je nu de conclusie in het voorbeeld?

Opgave 7

Gegeven zijn de functie $f_c(x) = 2\sqrt{x} + c$ en de lijn $y = 2x$.
Bereken voor welke waarde van c de grafiek van f en de gegeven lijn elkaar raken.

Verwerken

Opgave 8

Differentieer de functies.
Schrijf de afgeleide steeds zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

a $f(x) = 2\sqrt{x}$

b $f(x) = -\frac{2}{3x^3}$

c $f(x) = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}$

d $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2x}$

Opgave 9

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{x} - x\sqrt{x}$

a Toon met de afgeleide aan dat f dalend is. Doe dit door te beredeneren dat de afgeleide over het hele domein negatief is.

b Bereken of de grafiek van f in het punt met $x = 1$ toenemend of afnemend dalend is.

c De grafiek van f heeft een buigpunt. Bereken algebraïsch de x-coördinaat van dat buigpunt en rond je antwoord af op twee decimalen.

Opgave 10

Bepaal door gebruik te maken van de eigenschappen van functies na transformaties, de afgeleide van de volgende functies.

a $g(x) = \frac{2}{x-3}$

b $g(x) = \sqrt{3x+1}$

c $g(x) = \sqrt[5]{(-2x)^3}$

d $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$

Opgave 11

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

a Bereken de extremen van f.

b Voor welke waarden van p heeft $f(x) = p$ geen oplossingen?

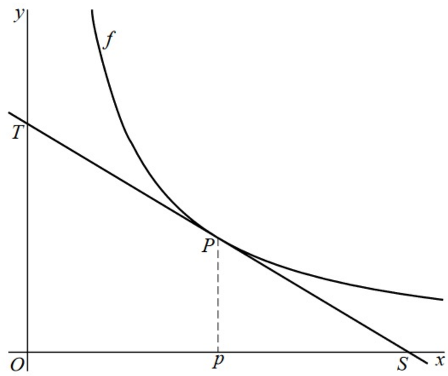
c Voor welke waarden van a hebben de grafiek van f en de lijnen $y = ax$ geen punten gemeenschappelijk?

d Voor welke waarden van b heeft de grafiek van f twee snijpunten met de lijn $y = -3x + b$?

Opgave 12

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{60}{x}$ met $x > 0$.

Het punt P ligt op de grafiek van f. De raaklijn in P aan de grafiek van f snijdt de x-as in S en de y-as in T. De x-coördinaat van P noemen we p. Bekijk de figuur.



Figuur 5

a Een vergelijking van de raaklijn ST is: $y = -\frac{60}{p^2} \cdot x + \frac{120}{p}$.

Toon dit aan.

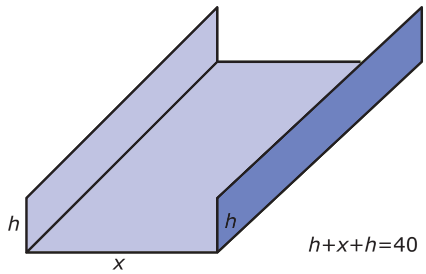
b Toon aan dat de oppervlakte van driehoek OST onafhankelijk is van de plaats van P op de grafiek van f.

(bron: examen wiskunde B in 2010, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 13: Goten voor bevloeien van akkers

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. Die goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. Die platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek.



Figuur 6

a De breedte van de goot noem je x en de hoogte is h. Welke verband bestaat er tussen x en h? Stel een formule voor dat verband op.

b Je kunt nu een formule opstellen voor de hoeveelheid water die zo'n goot kan bevatten. Druk de hoeveelheid water H in uit in x.

c Bereken bij welke waarde van x die hoeveelheid water maximaal is.

Testen

Opgave 14

Herleid en differentieer de volgende functies

a $y = 3x^3\sqrt{x}$

b $y = 4x\sqrt[3]{x}$

c $y = \frac{1}{4}x^2\sqrt[4]{x^3}$

d $y = 4ax^4\sqrt[4]{x}$

Opgave 15

Gegeven is de functie g door $g(x) = \frac{1}{x} + 4x$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = \frac{1}{4}$.

c Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = p$ precies één punt met de grafiek van g gemeen?

Opgave 16

Bekijk de functie f met $f(x) = \frac{10}{\sqrt{x}}$.

Voor welke waarde van b heeft de lijn $y = -\frac{5}{8}x + b$ twee snijpunten met de grafiek van f?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.