2.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt het onderwerp **Afgeleide functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- definitie afgeleide — limiet — vergelijking raaklijn
- differentieerregels — machtsregel voor gehele positieve n — somregel — constante-regel
- afgeleide na transformatie
- extremen — tekenschema afgeleide
- buigpunt — tweede afgeleide — buigraaklijn
- veelterm of polynoom — veeltermfunctie — hoofdstelling algebra

Activiteitenlijst

- afgeleiden bepalen met de limietdefinitie — vergelijking van een raaklijn opstellen
- afgeleiden bepalen met behulp van differentieerregels
- afgeleide van een getransformeerde functie bepalen
- extremen berekenen met behulp van de afgeleide
- buigpunten berekenen met behulp van de tweede afgeleide
- werken met veeltermfuncties

Achtergronden

De differentiaalrekening is min of meer tegelijkertijd en zonder dat ze het van elkaar wisten door twee van de allergrootste geleerden van hun tijd uitgevonden:

- In Engeland bedacht **sir Isaac Newton** zo rond 1665 zijn ‘fluxierekening’ toen hij zich in die periode bezig hield met beweging, snelheid en versnelling. Hij publiceerde zijn resultaten echter niet.
- In Duitsland schreef **Gottfried Wilhelm Leibniz** in 1675 het manuscript waarin hij zijn theorie rond het berekenen van hellingen en van oppervlaktes onder krommen uiteen zette.

Er ontstond daarna nogal een ruzie over wie de eerste ontdekker van de differentiaal- en integraalrekening was (deze termen en de notaties die we tegenwoordig gebruiken zijn van Leibniz afkomstig). De fluxierekening deed het in de Engelstalige landen en vooral onder de natuurkundigen heel lang erg goed. Maar uiteindelijk werd toch de begrippenstructuur van Leibniz aanvaard, vooral ook omdat de wiskundigen van de familie Bernoulli en de grote wiskundige Leonhard Euler (die grote vorderingen met deze nieuwe tak van de wiskunde maakten) op het vasteland van Europa woonden.

Lees ook: **Grafieken en verandering, differentiaalrekening**.

Testen

Opgave 1

Differentieer de volgende functies.

a $h(x) = -3(x^2-4)^2$

b $P(q) = \frac{0{,}5q^3+20q^2+60q}{q}$

c $f(x) = 4ax^5 - 12a^2x^2 + 60x + 100a$

d $g(a) = 4ax^5 - 12a^2x^2 + 60x + 100a$

e $E(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120}$

f $f(x) = (ax + b)^{12}$

Opgave 2

Bekijk de grafiek van $f(x) = 2x^3 - x^4$ op het interval [-1; 2,5].

a De grafiek heeft twee punten waarin de raaklijn horizontaal loopt. Toon dat aan met behulp van differentiëren en toon ook aan dat er toch maar één extreme waarde is.

b De grafiek van f heeft behalve (0,0) nog een buigpunt. Bereken de coördinaten van dat punt.

c Stel de raaklijn op aan de grafiek in het bij b bedoelde buigpunt.

Opgave 3

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = -x^2$ en $g(x) = 0{,}5x^3 - 2x$.

a Beredeneer dat de grafieken van deze twee functies elkaar maximaal drie keer kunnen snijden.

b Toon aan dat het product van deze twee functies slechts 3 nulpunten heeft.

c Bepaal het domein, het bereik en de asymptoten van het quotiënt van f en g.

Opgave 4

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoermiddel in grote bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt hun afzet q (in duizendtallen) uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0{,}1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1{,}5q^3 - 22{,}5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizendtallen euro.

a Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?

b Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q.

d Bepaal met behulp van differentiëren de prijs van één autoped bij maximale winst.

e Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q. Bepaal met behulp van differentiëren bij welke afzet GTK minimaal is.

Opgave 5

Gegeven is voor elke reële waarde van p de functie $f(x) = x^4 - 4x^3 + px^2$.

a Toon aan datvoor elke $p > 4{,}5$ de grafiek van f precies één minimum heeft.

b Punt A met $x_A = 1$ ligt op de grafiek van f. De rechte lijn met vergelijking $y = ax$ raakt de grafiek van f in het punt A. Welke waarde heeft p in dit geval?

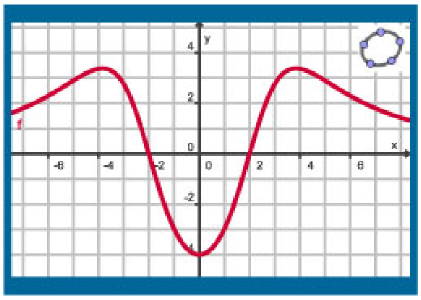
Opgave 6

Je ziet hier de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{100x^2 - 400}{x^4 + 100}$.

a Bepaal het bereik van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Los exact op: $f(x) \leq \frac{80}{x^2}$.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq \frac{1}{f(x)}$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 1

Opgave 7

Gegeven is de functie f door $f(x) = x(6+x)(10-x)^2$.

a Bereken algebraïsch de toppen en de buigpunten van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

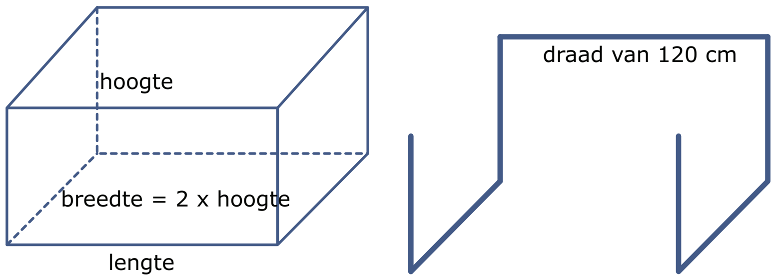
b Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = p$ precies drie punten met de grafiek van f gemeen?

c De raaklijn aan de grafiek van f in de oorsprong van het assenstelsel snijdt de grafiek in nog twee andere punten. Bereken de coördinaten van die punten in één decimaal nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 8: Plastic bakjes

Een bedrijf maakt plastic bakjes: bodem en zijvlakken van deze bakjes zijn rechthoeken; de breedte van de bakjes is tweemaal zo groot als de hoogte. Om de bakjes te verstevigen wordt een gebogen metaaldraad met een lengte van 120 cm aangebracht zoals in de tekeningen is aangegeven.



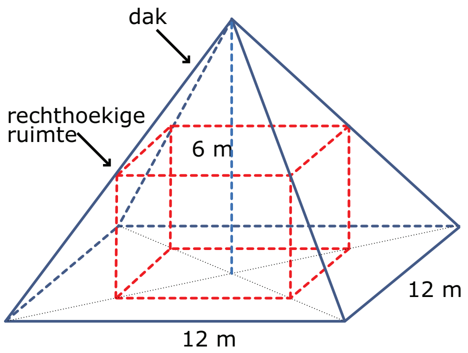
Figuur 2

a Bereken de maximale inhoud die deze bakjes kunnen krijgen.

b Als het goed is blijkt bij a dat de lengte van het bakje viermaal zo groot is als de hoogte. Toon aan dat bij elke draadlengte een maximale inhoud ontstaat als de breedte tweemaal de hoogte en de lengte viermaal de hoogte is.

Opgave 9: Piramidedak

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte te bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. Bekijk in de figuur hoe dit eruit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant.
Welke afmetingen krijgt deze ruimte?



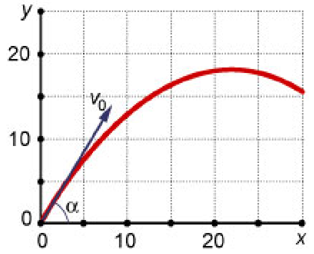
Figuur 3

Opgave 10: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt.
Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α.

De snelheid in de x-richting is $v_0 \cos(\alpha)$.
De snelheid in de y-richting is $v_0 \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee.
Dus is:

$x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$.



Figuur 4

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9{,}81$ m/s^2.
Hiermee maak je een model in Excel: **Model kogelbaan**.
Zie ook deze **kogelbaansimulatie**.

Laat zien dat bij de baan de formule $y = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2v_0 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$ hoort.

Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?

a Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.

b Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0, α en g.

c Bij welke waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g.

Examen

Opgave 11

Met domein $\mathbb{R}$ zijn gegeven de functies: $f(x) = \left(x^2 - 4\right)(2x + 1)$ en $g(x) = x^2 - 4$.

a Bepaal algebraïsch de karakteristieken van de grafiek van f.

b Los op: $f(x) > g(x)$.

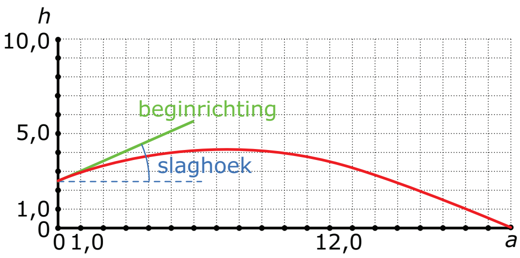
c De lijn met de vergelijking $x = p$, met $-2 < p < 0$, snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B. Bereken de waarden van p waarvoor de oppervlakte van driehoek OAB gelijk is aan 3.

d Door O gaat een lijn die de grafiek van f raakt. Stel een vergelijking van die lijn op. Geef een benadering in twee decimalen.

(bron: examen wiskunde B vwo 1996, eerste tijdvak, aangepast)

Opgave 12: Tennis

Bij sporten als volleybal en tennis is de service erg belangrijk, dat wil zeggen de manier waarop de bal in het spel gebracht wordt. We bekijken de service bij tennis. De speler staat bij het serveren 12 meter van het net. Het net is 1 meter hoog. We nemen aan dat de speler de bal raakt op een hoogte van 2,5 meter boven de grond en ter vereenvoudiging gaan we er van uit dat de speler de bal precies in de lengterichting van het veld slaat. In de eerste figuur zie je een mogelijke baan van de bal.



Figuur 5

De hoogte van de onderkant van de bal in meter ten opzichte van de grond noemen we h. De horizontale afstand in meter noemen we a. Het verband tussen h en a hangt af van de snelheid waarmee de bal geslagen wordt en van de beginrichting. Deze beginrichting wordt bepaald door de slaghoek. Dit is de hoek waaronder de bal geslagen wordt. Zie eerste figuur.

a Neem aan dat de bal onder een hoek van 15° geslagen wordt met een snelheid van v m/s. Bij deze hoek geldt bij benadering het volgende verband tussen a en h:

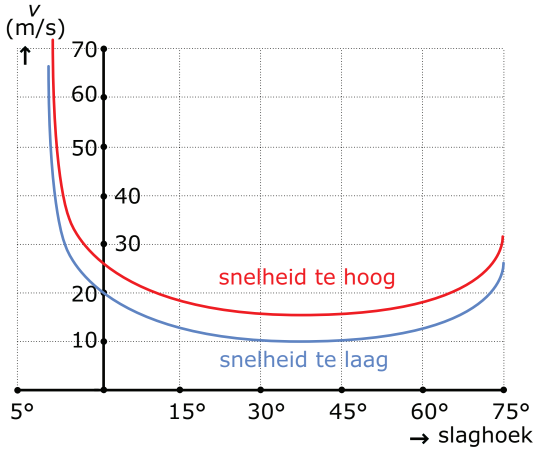
$h = -\frac{5{,}36}{v^2} \cdot a^2 + 0{,}27a + 2{,}50$

Een speler slaat de bal met een snelheid van 17 m/s. Bereken met behulp van differentiëren de grootste hoogte boven de grond die deze bal bereikt.

In deze vereenvoudigde situatie spreken we van een geldige service als:

- de speler die serveert 12 meter van het net staat;
- de bal precies in de lengterichting van het veld geslagen wordt;
- de bal over het net gaat zonder dit te raken;
- de bal neerkomt op een afstand van ten hoogste 7 meter voorbij het net.

In een artikel over dit onderwerp stond deze grafiek. Daarin is weergegeven bij welke combinaties van slaghoek en snelheid een geldige service verkregen wordt. Een speler die de bal slaat onder een hoek van 30° moet volgens deze grafiek de bal slaan met een snelheid van ongeveer 11 tot 13 m/s. Slaat hij te zacht dan komt de bal niet over het net. Slaat hij te hard dan komt de bal te ver voorbij het net op de grond. Een profspeler slaat bij een geldige service de bal met een snelheid van 150 km/h.



Figuur 6

b Bepaal met behulp van de grafiek de beginrichting van een mogelijke baan van deze bal.

Neem aan dat de bal onder een hoek van 10° geslagen wordt. Bij deze hoek geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen a en h:

$$h = \frac{-5{,}16}{v^2} \cdot a^2 + 0{,}18a + 2{,}50$$

Voor een geldige service moet de bal over het net gaan zonder dit te raken. De snelheid is te laag als in bovenstaande formule bij afstand $a = 12$ de hoogte $h \leq 1$ is. Volgens de grafiek is een snelheid van 16 m/s of minder te laag voor een geldige service. Echter, met behulp van een berekening is na te gaan dat de figuur erg onnauwkeurig is getekend.

c Welke snelheden (in m/s) zijn volgens de formule te laag voor een geldige service? Geef je antwoord in ten minste één decimaal.

Voor een geldige service moet de bal bovendien ten hoogste 7 meter voorbij het net de grond raken. Uit deze eis volgt ook een voorwaarde voor v.

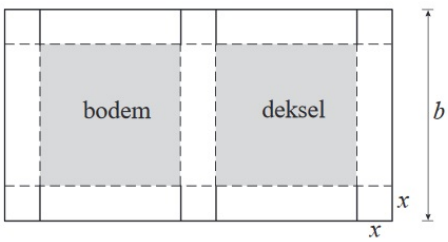
d Welke getallen moet je in de bovenstaande formule invullen om deze voorwaarde te krijgen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A vwo 2000, eerste tijdvak)

Opgave 13: Pizzadoos

Een bepaald type doos wordt op de manier zoals is in de figuur is afgebeeld uit een rechthoekig stuk karton gemaakt. Denk aan een pizzadoos.

Neem een stuk karton met een breedte van b cm. Wil je een doos maken die x cm hoog wordt, dan moet je voor de lengte van het stuk karton $2b - x$ cm nemen.
Op zes plaatsen worden vierkantjes van x bij x cm losgesneden en omgevouwen. De stippellijnen zijn vouwlijnen; de doorgetrokken lijnen zijn snijlijnen. Bodem en deksel zijn allebei vierkant.
Voor de inhoud in cm^3 $I(x)$ van zo'n doos geldt de formule:



Figuur 7

$$I(x) = 4x^3 - 4bx^2 + b^2x \text{ met } 0 < x < \tfrac{1}{2}b.$$

a Toon de juistheid van deze formule aan.

b Voor elke positieve waarde van b heeft de inhoud $I(x)$ een maximale waarde.

Dit maximum wordt bereikt voor $x = \frac{1}{6}b$.

Toon aan dat deze waarde van x juist is.

(bron: examen vwo wiskunde B in 2009, eerste tijdvak)