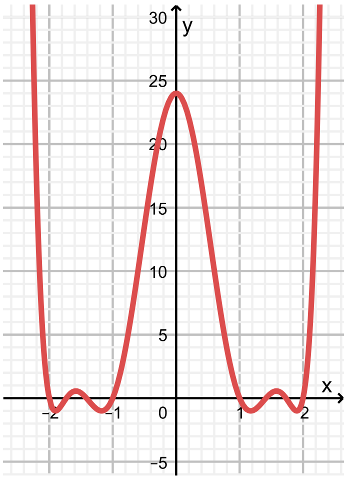
2.6 Veeltermen

Inleiding

Een mooie proeftuin om alle aspecten van differentiëren te leren kennen en te oefenen is een categorie functies die in de wiskunde veeltermfuncties wordt genoemd. Een veeltermfunctie heeft een voorschrift dat bestaat uit een optelling van machtsfuncties met gehele positieve exponenten (een veelterm of polynoom).



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat een veelterm en een veeltermfunctie is;
- extremen en buigpunten van veeltermfuncties berekenen;
- veeltermen vermenigvuldigen en delen.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met lineaire, kwadratische en machtsfuncties met gehele positieve exponent;
- extremen en buigpunten bepalen met behulp van differentiëren.

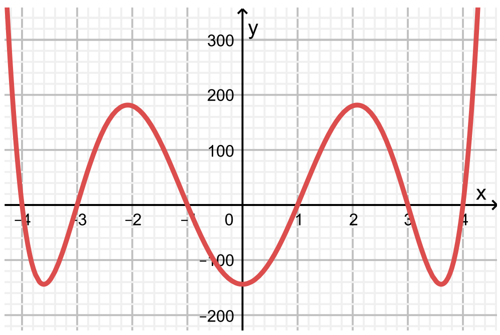
Verkennen

Opgave V1

Hiernaast zie je de grafiek van
$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 - 16)$.
Dit is een functie waarvan het voorschrift bestaat uit een product van drie veeltermen.

a Werk de haakjes uit en laat zien dat het functievoorschrift ook een veelterm is.

b Hoe kun je aan het functievoorschrift zien hoeveel nulpunten, extremen en buigpunten er zijn?

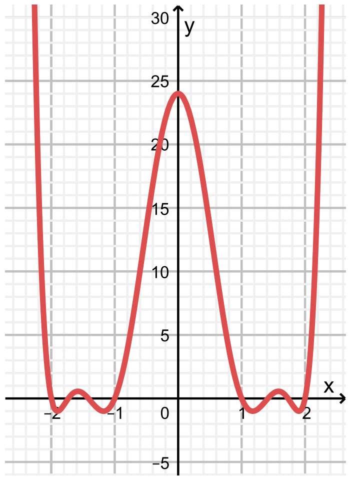


Figuur 2

Uitleg

Hier zie je de grafiek van de functie
$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 4)$.
Werk je de haakjes uit, dan krijg je:
$f(x) = x^8 - 10x^6 + 35x^4 - 50x^2 + 24$.

De functie heeft een voorschrift dat bestaat uit een optelling (aftrekking) van machtsfuncties waarvan de exponent een geheel getal groter of gelijk aan 0 is. Je noemt zo'n uitdrukking een veelterm of polynoom. Functie f is een veeltermfunctie. In dit geval spreek je van een achtstegraads functie omdat 8 de hoogte exponent van x is die voorkomt. Er zijn ook acht nulpunten. Meer is onmogelijk, minder kan wel, volgens de hoofdstelling van de algebra die zegt dat de hoogste exponent van een veeltermfunctie het maximale aantal nulpunten bepaalt.



Figuur 3

Om extremen te bepalen ga je differentiëren.
$f'(x) = 8x^7 - 60x^5 + 140x^3 - 100x = 0$ geeft hier 7 (of minder) oplossingen.

Om buigpunten te bepalen stel je de tweede afgeleide gelijk aan 0.
$f''(x) = 56x^6 - 300x^4 + 420x^2 - 100 = 0$ geeft hier 6 (of minder) oplossingen.

Opgave 1

Gegeven is $f(x) = x^8 - 10x^6 + 35x^4 - 50x^2 + 24$.

a Bepaal de x-waarden van de toppen door de vergelijking $f'(x) = 8x^7 - 60x^5 + 140x^3 - 100x = 0$ met de GR op te lossen.

b Bepaal de x-waarden van de buigpunten door de vergelijking $f''(x) = 56x^6 - 300x^4 + 420x^2 - 100 = 0$ met de GR op te lossen.

c Kun je je voorstellen wat de hoofdstelling van de algebra inhoudt?

Opgave 2

Neem $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van de grafiek van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c Bereken algebraïsch de buigpunten van de grafiek van f.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **veelterm** (of **polynoom**) is een uitdrukking van de vorm

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Een functie waarvan het voorschrift zo'n veelterm is heet een **veeltermfunctie** of **n-de graads functie**.
Het domein van dergelijke functies is $\mathbb{R}$.

De **hoofdstelling van de algebra** zegt dat een vergelijking zoals
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
maximaal n reële oplossingen heeft.
Het bewijs van deze stelling vereist een verdere studie van de algebra...

Deze stelling betekent wel dat een n-de graads functie maximaal n nulpunten heeft.
Bovendien betekent dit dat er maximaal $n - 1$ extremen en maximaal $n - 2$ buigpunten zijn.

Als je veeltermen vermenigvuldigd, krijg je opnieuw een veelterm. Zie **Voorbeeld 3**.
Maar als je veeltermen deelt, dan is dit niet altijd het geval. Zie **Voorbeeld 4**.

Voorbeeld 1

De functie f met $f(x) = x^3 + 9x^2 - 610x + 600$ is een derdegraads functie. Als je hem met de standaardinstellingen van de grafische rekenmachine in beeld brengt, zie je één nulpunt, namelijk (1,0).
Bereken algebraïsch de andere nulpunten.

Antwoord

Je moet oplossen: $x^3 + 9x^2 - 610x + 600 = 0$.
Je hebt geen algemene methoden voor het oplossen van een derdegraads vergelijking geleerd. Maar je kunt gebruik maken van het gevonden nulpunt (1,0). Dat betekent namelijk dat $x = 1$ oplossing van de vergelijking is (controleren door invullen). En daarom is te vergelijking te schrijven als $(x-1)(...) = 0$.

Met een staartdeling vind je:
$(x-1)\left(x^2 + 10x - 600\right) = 0$
Dit kun je verder ontbinden:
$(x-1)(x-20)(x+30) = 0$
De oplossing is:
$x = 1 \vee x = 20 \vee x = -30$.
Er zijn dus precies drie nulpunten:
(1,0), (20,0) en (-30,0).

Opgave 3

Bekijk met je grafische rekenmachine de grafieken van $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ en $g(x) = 1 - x^4$.
Je ziet dan, dat (1,0) een nulpunt van de grafiek van f en ook een snijpunt van de grafieken van f en g lijkt te zijn.

a Ga na dat dit laatste klopt.

b Bereken algebraïsch alle nulpunten van de grafiek van f.

c Bereken algebraïsch de extremen van f.

d Bereken algebraïsch het buigpunt van de grafiek van f.
Benader de coördinaten in twee decimalen nauwkeurig.

e Los op: $f(x) \leq g(x)$.

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $x^3 - 4x^2 = 12x$

b $-0{,}1x^5 = 4x^2$

c $(x-1)(x+1)(2x-5) = 5$

d $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 = 0$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Gegeven is de familie van functies

$f_p(x) = x^3 - px^2 + 9x$.

Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f_p precies twee extremen? Toon ook aan dat elke functie van deze familie precies één buigpunt heeft.

Antwoord

Voor de extremen geldt:

$f'_p(x) = 3x^2 - 2px + 9 = 0$

Er zijn twee oplossingen als

$D = (-2p)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 > 0$.

Dit is het geval als: $p < -\sqrt{27} \vee p > \sqrt{27}$.

Omdat de grafiek van f'_p dan een dalparabool is met twee nulpunten, wisselt de afgeleide ook van teken, zodat er inderdaad extremen zijn.

Voor de buigpunten geldt: $f''_p(x) = 6x - 2p = 0$.

Deze vergelijking heeft voor elke p precies één oplossing. De grafiek van f''_p is een rechte lijn met een nulpunt en f''_p wisselt dus van teken, er is een buigpunt.

Opgave 5

Bekijk enkele grafieken van functies van de vorm $f_c(x) = \frac{1}{2}x^4 - cx^2 + c$ op domein [-4,4].

a Bewijs dat elke functie f_c een extreme waarde heeft voor $x = 0$.

b Voor welke waarden van c raakt de grafiek van f_c de x-as?

c Voor welke waarden van c liggen de buigpunten van de grafiek van f_c op de x-as?

d Voor welke waarden van c heeft de grafiek van f_c voor $x = 1$ een hellingsgetal van 1?

Voorbeeld 3

$f(x) = x^3 - 8x^2$ en $g(x) = x^2 - 4$ zijn voorbeelden van functievoorschriften van veeltermfuncties.
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ is het product van deze veeltermfuncties.
Laat zien dat p ook een veeltermfunctie is en leg uit waarom het aantal toppen van de grafiek van p precies één meer is dan dat van f en g samen.

Antwoord

$p(x) = \left(x^3 - 8x^2\right)\left(x^2 - 4\right) = x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 32x^2$
Je ziet dat het functievoorschrift van p inderdaad als veelterm kan worden geschreven.
De extremen vind je uit $p'(x) = 5x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 64x = 0$.
Ondanks dat je x buiten haakjes kunt halen, is deze vergelijking niet eenvoudig op te lossen.
Je moet de extremen van p daarom met de GR bepalen.
Ga na, dat je vindt: max.$p(-1,44) \approx 37,71$, min.$p(0) = 0$, max.$p(1,37) \approx 26,42$ en min.$p(6,46) \approx -2424,9$.

Bekijk je alle drie de grafieken, dan zie je dat f twee, g één en p vier extremen heeft. Waarom dit zo is, zie je aan hun afgeleiden. f' heeft 2 als hoogste macht, g' heeft 1 als hoogste macht en p' heeft 4 als hoogste macht. Die hoogste machten van de afgeleiden bepalen hoeveel extremen er hoogstens zijn.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2x - 8$.
Bekijk de functie $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en de toppen van p.

b Los op: $p(x) = 2x - 8$. Is het uitwerken van de haakjes hierbij nodig?

c Los op: $p(x) \leq -2x^2$.

Voorbeeld 4

$f(x) = x^3 - 8x^2$ en $g(x) = x^2 - 4$ zijn voorbeelden van functievoorschriften van veeltermfuncties.

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ is het quotiënt van deze veeltermfuncties.

Laat zien dat q geen veeltermfunctie is en bepaal de asymptoten van de grafiek van q.

Antwoord

q wordt opnieuw een veeltermfunctie als deling van f en g 'op 0 uitkomt'.
Dat is echter niet het geval, als je een staartdeling uitvoert houd je $-28x$ over.

Dit betekent: $q(x) = \frac{x^3-8x^2}{x^2-4} = x - 8 - \frac{28x}{x^2-4}$.

Het functievoorschrift krijgt niet de gedaante van een veelterm, het blijft een gebroken functie.
Als $x^2 - 4 = 0$ dan zijn er geen reële uitkomsten (delen door 0).
Dit is het geval als $x = -2 \vee x = 2$. Aan de grafiek zie je dat bij deze waarden van x verticale asymptoten optreden.

Horizontale asymptoten zijn er niet: als x oneindig groot wordt, benadert $\frac{28x}{x^2-4}$ de waarde 0 en wordt dus $q(x) \approx x - 8$. Hetzelfde geldt als x hele grote negatieve waarden aanneemt.

Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2x - 8$.

Bekijk de functie $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

a Bepaal het domein van q. Waarom is q geen veeltermfunctie?

b Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van q? Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van q?

c Bepaal het bereik van q met behulp van de grafische rekenmachine.

Verwerken

Opgave 8

Gegeven is de derdegraadsfunctie f met voorschrift $f(x) = x^3 + 9x^2 - 15x + 5$.

a Breng de grafiek van f in beeld op je grafische rekenmachine. Welke nulpunten kun je aflezen?

b Bereken algebraïsch de andere twee nulpunten in twee decimalen nauwkeurig. Controleer je antwoorden met je rekenmachine.

c Bereken ook algebraïsch de toppen en het buigpunt van f in twee decimalen nauwkeurig.

d Voor welke x-coördinaten van de grafiek van f heeft de raaklijn een richtingscoëfficiënt van -5?

e Welk hellingsgetal heeft de grafiek van f in het snijpunt met de y-as?

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $x^2(x-2) = 3x - 6$

b $0{,}5x^4 + 4x^3 - 6x = 48$

c $0{,}25x^6 = 4x^3 - 15$

d $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$

Opgave 10

Gegeven is de familie van functies f_p door het voorschrift $f_p(x) = px^4 - 2x^2 + 8p$.

a Bepaal algebraïsch de toppen en de buigpunten van de grafiek van f_1.

b Voor welke waarden van p raakt de grafiek van f_p de x-as?

c Voor welke waarden van p liggen de buigpunten van de grafiek van f_p op de x-as?

Opgave 11

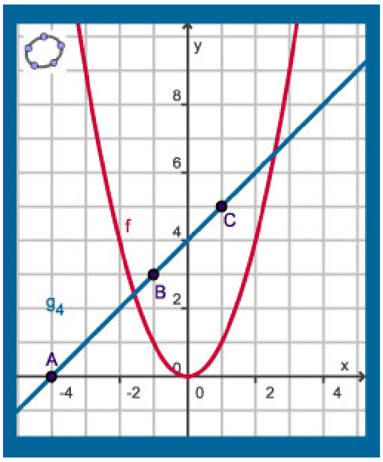
Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g_a(x) = x + a$. In de figuur zie je de grafieken van f en g_4. Functie h_a is gegeven door $h_a = f(x) \cdot g_a(x)$.

a Beredeneer dat de grafiek van h_4 door de punten O, A, B en C moet gaan.

b Bereken de uiterste waarden van h_4.

c De snijpunten van de grafieken van h_a en g_a liggen op drie rechte lijnen. Welke?

d Bewijs dat de toppen van de grafieken van h_a op de kromme lijn $y = -\frac{1}{2}x^3$ liggen.



Figuur 4

Opgave 12

Gegeven zijn de functies f_c door $f_c(x) = cx(x+6)^2$. Bekijk de grafieken van deze familie van functies op het domein [-8,1].

a Bereken algebraïsch de extremen van f_1 op dit domein.

b Alle functies f_c hebben een extreme waarde voor $-6 < x < 0$. Voor welke waarden van c is die extreme waarde gelijk aan 80?

c Druk de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f_c uit in c.

d Voor welke waarde van c gaat de buigraaklijn aan de grafiek van f_c door het punt (0,80)?

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10x-40}{x^2-10}$.

Bekijk de grafiek van f op de rekenmachine, voor $-10 \leq x \leq 10$.

a Welke drie asymptoten heeft de grafiek van f? Leg uit hoe deze asymptoten uit het functievoorschrift zijn af te leiden.

b Bepaal het bereik van f in één decimaal nauwkeurig.

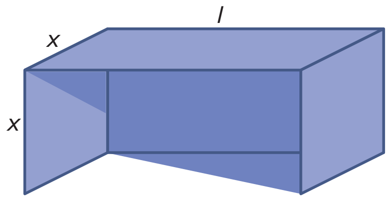
c Voor welke waarden van p met p in één decimaal nauwkeurig, heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen?

d De lijn $y = 10x - 40$ snijdt de grafiek van f van links naar rechts in drie punten A, B en C. Welke van de drie lijnstukken OA, OB of OC is het langst?

Toepassen

Opgave 14: Fietsenstalling

Voor het bouwen van een eenvoudige fietsenstalling is 40 m^2 golfplaat beschikbaar. Daarmee worden beide zijwanden, de achterwand en de bovenkant bekleed. Het geraamte van het bouwsel wordt zo gemaakt dat een zuiver rechthoekig blok ontstaat, dat even hoog als diep is.



Figuur 5

a Geef een formule voor de inhoud van het rechthoekige blok als functie van x.

b Welke waarden kan x aannemen?

c Welke waarden kan de inhoud van de fietsenstalling aannemen?

Testen

Opgave 15

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ en $g(x) = -2x^2 + 20$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en extremen van de functie f.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f en g en los op $f(x) < g(x)$.

c Onderzoek hoeveel waarden voor x er zijn waarvoor beide grafieken dezelfde helling hebben.

Opgave 16

Los op: $0{,}5x^3 + 2x^2 - 3x = 6$.

Opgave 17

Gegeven is voor elke reële waarde van p de functie $f_p(x) = x^4 - 4x^3 + px^2$ met het domein $\mathbb{R}$.

a Bereken de nulpunten, de toppen en de buigpunten van de grafiek van f_4.

b De lijn $y = mx$ en de grafiek van f_4 hebben precies drie punten gemeenschappelijk. Bereken m.

c Voor welke waarden van p heeft f_p precies drie extremen?

Opgave 18

Op het domein $[-1,3]$ zijn de volgende functies gegeven: $f(x) = (x-2)^2(2x+1)$ en $g_a(x) = a(2x+1)$.

a Los op: $f(x) = g_2(x)$.

b Bereken algebraïsch de nulpunten, de toppen en het buigpunt van de grafiek van f.

c Voor welke waarden van a heeft de vergelijking $f(x) = g_a(x)$ twee oplossingen?

d Voor welke waarden van a bestaan er geen raaklijnen van f die evenwijdig zijn aan g_a?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.