# 2.5 Buigpunten

## Inleiding

Zodra de helling van de grafiek overgaat van toenemende stijging (of daling) naar afnemende stijging (of daling), of omgekeerd, spreek je van een buigpunt. In zo'n buigpunt heeft de helling een (lokaal) maximum of minimum. Je vindt buigpunten dus door naar de extremen van de afgeleide te zoeken.

Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- de betekenis van de tweede afgeleide voor de grafiek kennen;
- buigpunten berekenen met behulp van de tweede afgeleide van een functie;
- het opstellen van de vergelijking van een buigraaklijn.

### Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van differentiëren.

## Verkennen

### Opgave V1

De afstand $s$ die een bewegend voorwerp als functie van de tijd $t$ aflegt wordt gegeven door $s(t) = t^3 - 6t^2 + 36t$ met $0 \leq t \leq 4$.
Het voorwerp heeft op $t = 0$ al een flinke beginsnelheid. Vervolgens remt het wat om daarna weer te versnellen.

**a** Hoe zie je dat aan de grafiek?

**b** Met differentiëren kun je een formule opstellen voor de snelheid van dit voorwerp. Welke formule is dat?

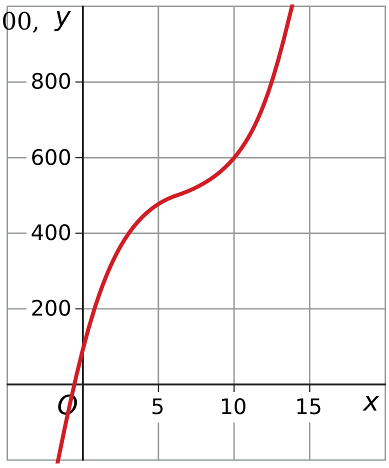
**c** Hoe kun je een formule opstellen voor de verandering van die snelheid, de versnelling?

**d** Het tijdstip waarop het voorwerp van vertragen overgaat in versnellen kun je exact berekenen. Laat zien hoe.

## Uitleg

**Bekijk de applet.**

Je ziet hier de grafiek (rood) van de functie $f(x) = x^3 - 20x^2 + 150x + 100$, zijn afgeleide $f'$ en de afgeleide van $f'$ aangegeven door $f''$.




Figuur 2

De grafiek van $f$ stijgt voortdurend.
Dat zie je aan de afgeleide: $f'(x) > 0$ voor elke waarde van $x$. Nauwkeuriger:

- ongeveer tot $x = 7$ is er afnemende stijging;
- ongeveer vanaf $x = 7$ is er toenemende stijging.

Waar deze functie overgaat van een afnemende stijging naar een toenemende stijging zit een buigpunt.
Een buigpunt van een functie is een punt waar de afgeleide van die functie een extreme waarde bereikt. Met de afgeleide van $f'$ vind je die extreme waarde. De afgeleide van $f'$ noem je de tweede afgeleide $(f')' = f''$. Differentiëren geeft:
$f'(x) = 3x^2 - 40x + 150$
$f''(x) = 6x - 40$

Het minimum van $f'(x)$ vind je door $f''(x) = 6x - 40 = 0$ op te lossen.

Je vindt $x = \frac{40}{6}$, het buigpunt zit daarom bij $x = \frac{40}{6} \approx 6{,}67$. De $y$-coördinaat van het buigpunt is $f\left(\frac{40}{6}\right) \approx 507{,}41$.

### Opgave 1

Bekijk de functie $f$ in de **Uitleg**.

**a** Bereken $f(0)$, $f'(0)$ en $(f')'(0) = f''(0)$.
Beschrijf de betekenis van deze drie getallen voor de grafiek van $f$.

**b** De grafiek van $f$ heeft een buigpunt. Hoe blijkt dat uit de hellingsgrafiek?

**c** Bepaal algebraïsch de exacte coördinaten van het buigpunt.

**d** Is in dit buigpunt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn ook 0?

### Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 12x$.

**a** Plot de grafieken van $f$, $f'$ en $f''$ met venster $[-5,10] \times [-40,10]$.

**b** De grafiek van $f$ heeft een buigpunt. Hoe blijkt dat uit de hellingsgrafiek?

**c** Bepaal algebraïsch de coördinaten van het buigpunt.

**d** Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het buigpunt aan de grafiek van $f$.

# Theorie en voorbeelden

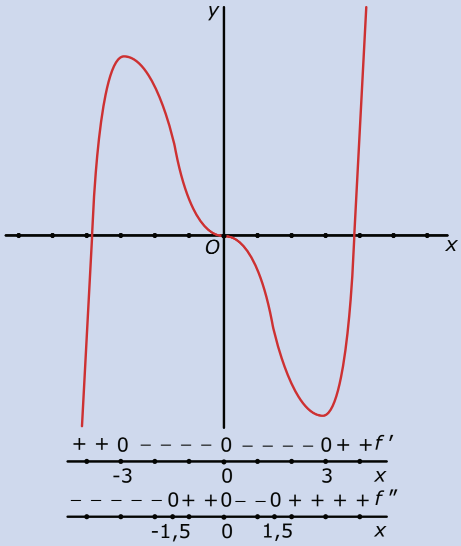
## Om te onthouden

Bij toenemende stijging/daling en afnemende stijging/daling verandert de helling.

- Bij toenemende stijging wordt de helling steeds groter: $f'$ stijgt.
  De afgeleide van $f'$ is dan positief.
- Bij toenemende daling wordt de helling steeds kleiner: $f'$ daalt.
  De afgeleide van $f'$ is dan negatief.
- Bij afnemende stijging wordt de helling steeds kleiner: $f'$ daalt.
  De afgeleide van $f'$ is dan negatief.
- Bij afnemende daling wordt de helling steeds groter: $f'$ stijgt.
  De afgeleide van $f'$ is dan positief.

De afgeleide van $f'$ heet de **tweede afgeleide** van $f$.

De tweede afgeleide noteer je als: $f''(x)$ of $\frac{d^2 y}{d x^2}$.



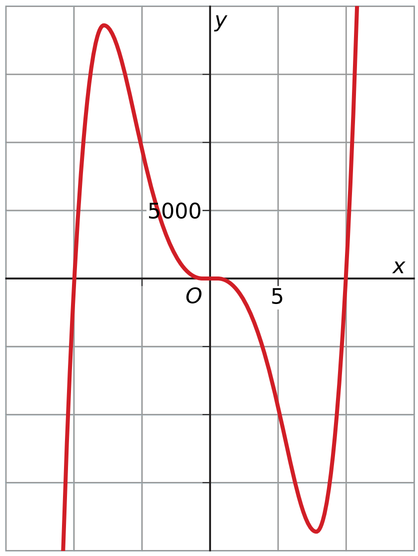

Figuur 3

Het punt waarin de helling overgaat van toenemend naar afnemend (of omgekeerd) heet een **buigpunt** van de grafiek.
Je vindt die buigpunten door naar de extremen van de afgeleide te zoeken. Dat doe je met behulp van de tweede afgeleide.

Een **buigraaklijn** is de raaklijn door een buigpunt. Als je de coördinaten van het buigpunt weet, stel je de buigraaklijn op zoals een normale raaklijn.

## Voorbeeld 1

Functies kunnen verschillende buigpunten hebben.
Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3(x^2 - 100)$ met drie zichtbare buigpunten.
Bepaal exact de buigpunten van deze grafiek.




Figuur 4

Antwoord

Bepaal de tweede afgeleide:

$f(x) = x^5 - 100x^3$

$f'(x) = 5x^4 - 300x^2$

$f''(x) = 20x^3 - 600x$

De buigpunten vind je door $f''(x)$ gelijk te stellen aan 0.

$$20x^3 - 600x = 0$$
$$20x(x^2 - 30) = 0$$
$$x = 0 \lor x = -\sqrt{30} \lor x = \sqrt{30}$$

Bij $x = 0$ heeft $f$ inderdaad een buigpunt (met een horizontale raaklijn).

De buigpunten zijn $\left(-\sqrt{30}, 2100\sqrt{30}\right)$, $(0,0)$ en $\left(\sqrt{30}, -2100\sqrt{30}\right)$.

## Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je de grafiek van de functie $f$.

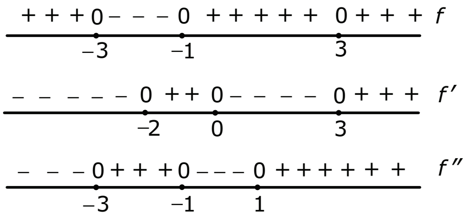
**a** Omschrijf de verschillende hellingsovergangen bij de buigpunten.

**b** Bereken exact de extremen van deze functie.

**c** Bereken exact de buigpunten van deze grafiek.

## Opgave 4

Van een functie zijn de tekenschema's van $f(x)$, van $f'(x)$ en van $f''(x)$ gegeven door deze figuren.




Figuur 5

**a** Heeft de grafiek van $f$ een buigpunt boven de $x$-as? Zo ja, waar?

**b** Schets een mogelijke grafiek van $f$.

## Opgave 5

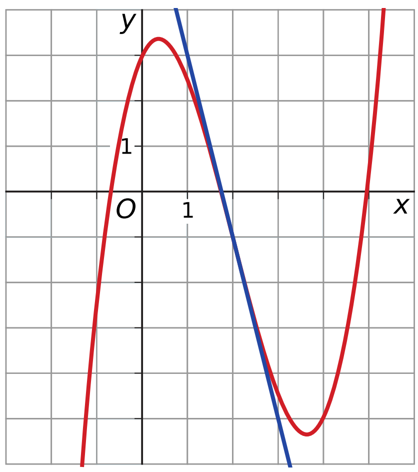
Een zeilwagen legt een afstand af die voor $t > 0$ wordt beschreven met de functie $s(t) = 1{,}2t^2$. Bepaal de afgelegde afstand, de snelheid en de versnelling op $t = 8$.

## Voorbeeld 2

**Bekijk de applet**

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 2x + 3$.

De getekende lijn is de raaklijn in het buigpunt, kortweg de buigraaklijn.
Stel een formule voor de buigraaklijn op.




Figuur 6

Antwoord

Bepaal de tweede afgeleide:
$f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 2$
$f''(x) = 3x - 6$

Het buigpunt vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen:
$f''(x) = 3x - 6 = 0$ geeft $x = 2$.

De coördinaten van het buigpunt zijn $(2, f(2)) = (2, -1)$.

De helling in dat punt is $f'(2) = -4$. De getekende raaklijn heeft een formule van de vorm $y = -4x + b$, waarin je $b$ vindt door het buigpunt in te vullen: $-4 \cdot 2 + b = -1$ geeft $b = 7$.

De vergelijking van de buigraaklijn is: $y = -4x + 7$.

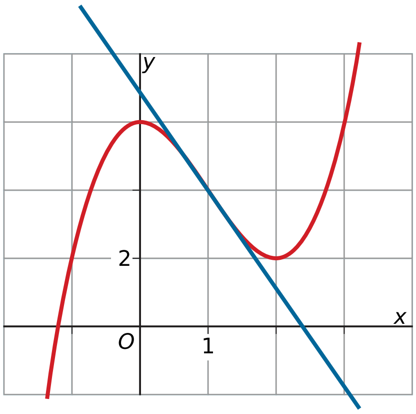
### Opgave 6

Hier zie je de grafiek van $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ met daarin de buigraaklijn, de raaklijn in het buigpunt, getekend. Stel een vergelijking op van de getekende buigraaklijn.

**a** Welke coördinaten heeft het buigpunt?

**b** Bereken de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn.

**c** Stel een vergelijking op van de getekende buigraaklijn.




Figuur 7

## Verwerken

### Opgave 7

Bepaal met behulp van differentiëren van de volgende functies alle buigpunten.

**a** $f(x) = 0{,}5x^3 + 6x^2 - 90$

**b** $g(x) = 4x^2 - 0{,}5x^4$

**c** $h(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4$

### Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}25x^4 - 36x^2$.

**a** Bereken exact de buigpunten van de grafiek van $f$.

**b** De grafiek van $f$ heeft twee buigraaklijnen die elkaar snijden op de $y$-as. Bereken de coördinaten van dit snijpunt.

### Opgave 9

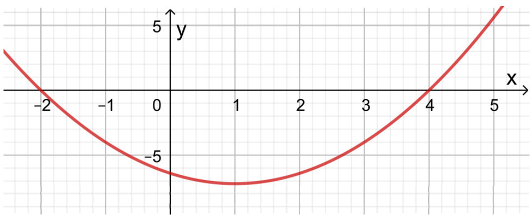
Gegeven is de functie $f(x) = 1\frac{1}{2}x^3 - 4x^2$. Onderzoek algebraïsch of de grafiek van $f$ bij het punt $A$ met $x_A = 1$ toe- of afnemend stijgt of daalt.

### Opgave 10

Dit is de grafiek van de afgeleide van een functie, gemaakt met GeoGebra.

**a** Bij welke waarden van $x$ heeft deze functie extremen?

**b** De functie heeft een buigpunt, waarvan de $y$-coördinaat gelijk is aan 5. Bepaal de vergelijking van de buigraaklijn.




Figuur 8

### Opgave 11

Vaak is de opbrengst $TO$ bij de productie van een bepaald artikel afhankelijk van de ingezette arbeidstijd $a$ (in uren per dag). Een dergelijk verband kan worden beschreven door de functie $TO(a) = -\frac{1}{3}a^3 + 8a^2$.

**a** Bekijk de grafiek van $TO$. De opbrengst stijgt in het begin progressief (steeds sterker). Schat tot hoeveel ingezette arbeidstijd dat ongeveer zo is.

**b** Het antwoord op de voorgaande vraag kun je nauwkeurig berekenen met behulp van differentiëren. Laat zien hoe dat gaat.

**c** Hoeveel bedraagt de grootste opbrengststijging per uur?

### Opgave 12

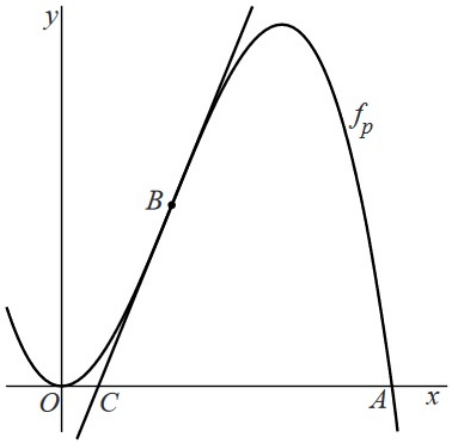
Voor $p > 0$ is de functie $f_p$ gegeven door $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.

De grafiek van $f_p$ raakt de $x$-as in het punt $O(0,0)$ en snijdt deze in het punt $A(3p,0)$.

De grafiek van $f_p$ heeft een buigpunt $B\left(p,2p^3\right)$. De buigraaklijn in $B$ snijdt de $x$-as in punt $C$.

In de figuur is deze situatie weergegeven. Bewijs dat de lengte van $CA$ voor elke waarde van $p > 0$ acht keer zo groot is als de lengte van $OC$.

**(bron: examen vwo wiskunde B in 2014, tweede tijdvak)**

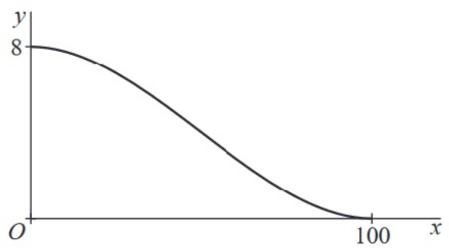



Figuur 9

## Toepassen

### Opgave 13: Landing

Bekijk een wiskundig model van de baan van een vliegtuig bij de landing.
Een vliegtuig vliegt op een hoogte van 8 km. Op een afstand van 100 km van het vliegveld (horizontaal gemeten) wordt het landingsproces ingezet.
De baan van het vliegtuig is in een assenstelsel getekend: $x$ is de afstand (kilometer, horizontaal gemeten) vanaf het punt waar het landingsproces wordt ingezet en $y$ is de hoogte (kilometer).




Figuur 10

Bekijk de figuur. De piloot begint het landingsproces in het punt $(0,8)$ en het vliegtuig komt in het punt $(100,0)$ op de grond.

De baan die het vliegtuig tijdens het landingsproces beschrijft, wordt in het assenstelsel bij benadering gegeven door: $y(x) = 8 - 2{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot x^3$.

**a** Toon langs algebraïsche weg aan dat volgens deze formule het vliegtuig zowel in het punt $(0,8)$ als in het punt $(100,0)$ een horizontale bewegingsrichting heeft.

De snelheid in horizontale richting is tijdens het hele landingsproces 500 km/h.
Er geldt: $x = 500t$, waarbij $t$ het aantal uren na het inzetten van de landing is en $0 \leq t \leq 0{,}2$.
Voor de hoogte $y$ geldt: $y(t) = 8 - 600t^2 + 2000t^3$.

**b** Toon dit aan.

**c** Om veiligheidsredenen mag de absolute waarde van de verticale versnelling $y''(t)$ tijdens het landingsproces niet groter zijn dan 1200 km/h$^2$.
Onderzoek of aan deze eis is voldaan.

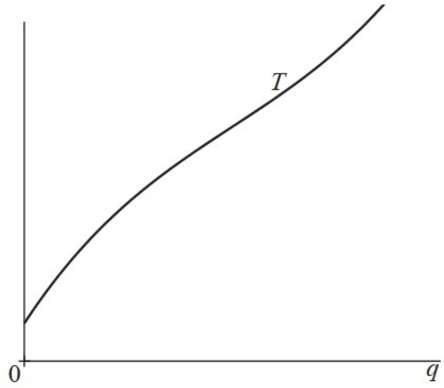
**(bron: examen vwo wiskunde B in 2008, eerste tijdvak)**

### Opgave 14: Kostenfuncties

In de economie worden de volgende kosten bij de productie van een hoeveelheid $q$ van een bepaald product onderscheiden:

- de totale kosten $T(q)$;
- de marginale kosten $M(q)$, die je benadert door $T'(q)$.

Gegeven is: $M(q) = T'(q)$.
In het algemeen geldt dat de totale kosten $T(q)$ eerst afnemend stijgend en vervolgens toenemend stijgend zijn. In de figuur is deze situatie weergegeven.



Figuur 11

Omdat derdegraadsfuncties $T$ met $T(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d$ zich onder bepaalde voorwaarden voor $a$, $b$, $c$ en $d$ op deze manier gedragen, worden deze vaak gebruikt om de totale kosten te beschrijven.
Voor een bruikbare derdegraadsfunctie $T$ moet gelden: $a > 0$, $c > 0$ en $d > 0$.

Een voorwaarde voor $b$ vind je door te bedenken dat de marginale kosten $M(q) = T'(q)$ eerst afnemen en vervolgens toenemen. Dan moet er een productiehoeveelheid $q$ zijn waarbij de marginale kosten $M(q)$ minimaal zijn.

Toon aan dat hieruit volgt dat $b < 0$.

**(naar: examen vwo wiskunde B in 2011, tweede tijdvak)**

## Testen

### Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12$.

**a** Toon aan met de eerste en de tweede afgeleide van $f$ dat de grafiek van $f$ toenemend dalend is in $x = 1$.

**b** Bereken de coördinaten van het buigpunt.

### Opgave 16

Van een functie $f$ is de afgeleide gegeven door $f'(x) = 4x - 0{,}5x^2$.

**a** Geef aan bij welke waarden van $x$ de grafiek van $f$ een maximum of minimum heeft en geef de $x$-coördinaat van het buigpunt van de grafiek van $f$.

**b** De $y$-coördinaat van het buigpunt is 10. Stel een vergelijking op van de buigraaklijn van de grafiek van $f$.

### Opgave 17

Een verffabriek gebruikt de functie $TK = 0{,}5q^3 - 3q^2 + 6q$ voor de productiekosten van een bepaald soort verf. Hierin is $q$ de hoeveelheid geproduceerde verf in duizenden liter per dag en verder stelt $TK$ de kosten in duizenden euro voor.

**a** De marginale kosten zijn de meerkosten per liter die ontstaan bij de productie van 1 liter extra. Bereken de marginale kosten bij een productie van 3000 liter verf per dag.

**b** Je kunt de marginale kosten goed benaderen met behulp van de afgeleide: $MK = TK'$. Bereken ook op deze manier de marginale kosten bij een productie van 3000 liter per dag.

**c** De verffabrikant produceert het liefst een hoeveelheid waarbij de marginale kosten minimaal zijn. Bij welke productie in liter per dag is dat het geval? Bereken het antwoord algebraïsch.

## Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het bepalen van de tweede afgeleide**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

**Werk met AlgebraKIT.**