2.4 Extremen berekenen

Inleiding

Als je een functievoorschrift hebt, kun je met de grafische rekenmachine een bijpassende grafiek tekenen. Je kunt dan de extreme waarden door de machine laten berekenen. Nadeel daarvan is dat je vaak niet zeker weet of je alle extremen in beeld hebt. Verder kan je rekenmachine ze alleen maar benaderen. Met behulp van de afgeleide van de functie kun je extremen echt berekenen: het zijn de punten van de grafiek waarin de afgeleide overgaat van positief in negatief of omgekeerd.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- extremen berekenen met behulp van de afgeleide van een functie;
- extremen berekenen bij families van functies;
- het berekenen van extremen toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van de GR en met behulp van hellingsgrafieken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^3 - 3x$.
Hoe kun je algebraïsch de toppen van beide functies vinden? Wat valt je op als je dit doet?

Uitleg

Bekijk de applet

Gegeven is de functie f (rood) door:
$f(x) = 0{,}02x^5 - 0{,}3x^3 + 4$
Zijn afgeleide (blauw) is:
$f'(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}9x^2$.

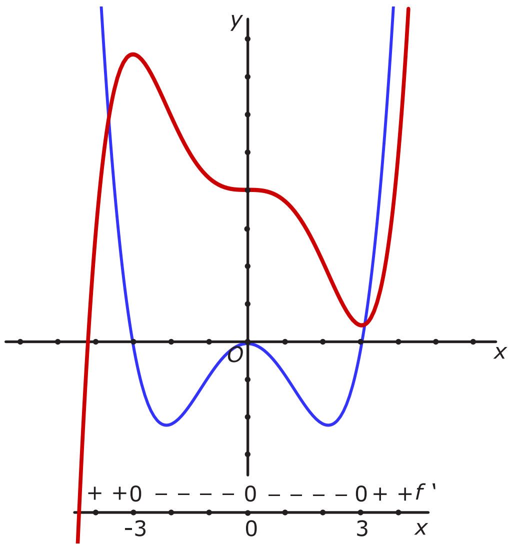
Bereken met de afgeleide de extremen van f.

Voor de nulpunten van de afgeleide geldt:

$$\begin{aligned} 0{,}1x^4 - 0{,}9x^2 &= 0 \\ x^2(x^2 - 9) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = -3 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Voor het berekenen van extremen is het niet voldoende om alleen nulpunten van de afgeleide functie te berekenen. Je moet nog controleren of er sprake is van een maximum, een minimum of geen van beide.

De grafiek van f laat zien dat er bij $x = -3$ en $x = 3$ echt extremen optreden, maar bij $x = 0$ niet. Er geldt nu: max. $f(-3) = 3{,}24$ en min. $f(3) = -3{,}24$.



Figuur 2

In plaats van de grafiek kun je ook een tekenschema gebruiken. Onder de grafiek zie je het tekenschema van de afgeleide.
Bij $x = -3$ en $x = 3$ treedt een tekenwissel op, maar bij $x = 0$ niet.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je de extremen van een functie kunt berekenen.

Bereken de extremen van de volgende functies.
Vergeet niet bij elke functie óf een grafiek te schetsen óf een tekenschema te maken.

a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

b $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12$

c $h(x) = -x^5 + 1\frac{1}{4}x^4 + 3\frac{1}{3}x^3 - 6$

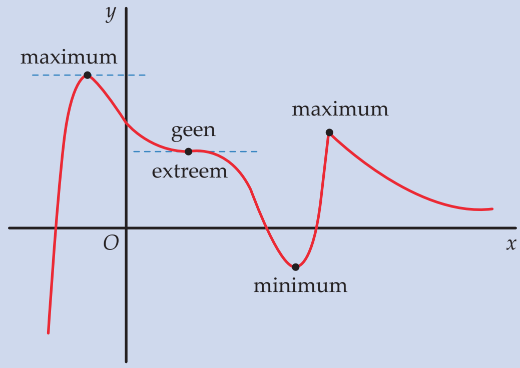
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

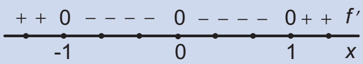
Extremen bepalen gaat bij een functie, waarvan $f(x)$ het functievoorschrift is, als volgt:

- Bepaal de afgeleide van $f(x)$.
- Los op $f'(x) = 0$, houd rekening met het domein van $f(x)$.
- Bekijk de grafiek van de functie of maak een **tekenschema van de afgeleide**.



Figuur 3

- Bekijk bij elk nulpunt of de grafiek van $f'(x)$ overgaat van negatief in positief (minimum) of van positief naar negatief (maximum).
- Bereken de waarden van de maxima en minima.



Figuur 4

Een maximum vind je waar de afgeleide overgaat van positief (de grafiek van f stijgt) naar negatief (de grafiek van f daalt). Een minimum vind je waar de afgeleide overgaat van negatief naar positief. Daar waar geen tekenwisseling plaatsvindt, is er ook geen extreem.

Een wiskundig probleem waarbij je differentiëren gebruikt om extremen te bepalen om het op te lossen wordt een **optimalisatieprobleem** genoemd. In het dagelijks leven komen er talloze optimalisatieproblemen voor.

Voorbeeld 1

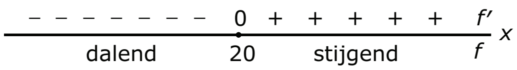
Bereken de extremen van de functie: $f(x) = 25x^4 - 800000x - 50000$.

Antwoord

Vind de extremen door de functie te differentiëren en de afgeleide gelijk te stellen aan 0:
$f'(x) = 100x^3 - 800000$

$f'(x) = 100x^3 - 800000 = 0$ geeft: $x = \sqrt[3]{8000} = 20$.

Maak een tekenschema van de afgeleide.



Figuur 5

Bij $x = 20$ heeft f een minimum, want de functie gaat daar over van dalend in stijgend.
Min. $f(20) = -12050000$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 - 120x$. Soms is een grafiek goed in beeld brengen nog lastig. Je kunt dan om te bepalen of er sprake is van een extreem en of het een maximum dan wel een minimum is, een tekenschema maken van de afgeleide. Zie het voorbeeld.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulwaarden van de afgeleide.

c Maak een tekenschema van de afgeleide van f. Geef er de plaats van de extremen in aan.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3$.

a Bereken de waarden van x waarin $f'(x) = 0$.

b Deze functie heeft voor $x = 0$ een horizontale raaklijn. Heeft de functie ook een extreme waarde voor $x = 0$?

c Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = |x|$. Wat is er aan de hand in $x = 0$?

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100x^2$ en $g(x) = x^2 \cdot (x - 10)^2$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van beide grafieken.

b Bereken met behulp van differentiëren de extremen van g.

c Als je het getal 100 in het functievoorschrift van f vervangt door een ander getal, gaat de grafiek door het punt waarin g een maximum heeft. Door welk getal moet je 100 vervangen? En hoeveel snijpunten hebben beide grafieken dan?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = x^3 + ax$.
Voor elke waarde van a heb je met een andere functie te maken.

Met je grafische rekenmachine kun je een paar grafieken van deze familie van functies voor verschillende waarden van a maken.

Sommige functies f_a hebben extremen, andere niet.
Onderzoek welk soort extremen er zijn bij de waarden van a.

Antwoord

$f'_a(x) = 3x^2 + a$

$3x^2 + a = 0$ geeft

$x = \sqrt{-\frac{a}{3}} \vee x = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$

Dit geeft de volgende mogelijkheden:

- $a > 0$:
  Vanwege de wortels zijn er dan geen oplossingen voor x.
  Dus heeft f_a geen extremen.
- $a = 0$:
  Dit geeft $f'_0(x) = 3x^2$. $f'_0(x)$ is dan altijd positief of 0.
  Dus heeft f_a geen extremen.
- $a < 0$:
  Nu is de grafiek van de afgeleide een dalparabool met twee nulpunten.
  Dus f_a heeft twee extremen: een maximum (voor $x = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$) en een minimum (voor $x = \sqrt{-\frac{a}{3}}$).

Opgave 5

Gegeven is de functie $f_a(x) = ax^3 - x$ met $a > 0$.

a Neem $a = 1$ en bereken de extremen van f_1.

b Bereken de x-coördinaten van de extremen van f_a, voor alle waarden van a.

c Bereken de y-coördinaten van de extremen van f_a.

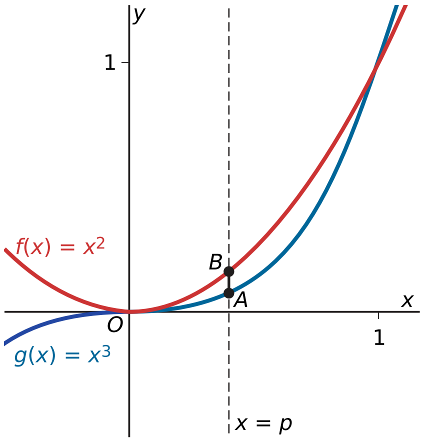
d Voor welke waarde van a is de maximale waarde van f gelijk aan 1?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Bekijk de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$.
De lijn $x = p$ met $0 < p < 1$ snijdt de grafiek van f in punt B en die van g in A.

Bereken exact de waarde van p waarvoor de lengte van lijnstuk AB maximaal is.



Figuur 6

Antwoord

Voor beide punten A en B geldt $x = p$. Dat geeft coördinaten $A(p,p^3)$ en $B(p,p^2)$.
Omdat $f(p) > g(p)$ geldt voor de lengte L van lijnstuk AB:
$L(p) = f(p) - g(p) = p^2 - p^3$

Stel de afgeleide van $L(p)$ gelijk aan 0 en los de vergelijking op:
De afgeleide is: $L'(p) = 2p - 3p^2$.

$$\begin{aligned} 2p - 3p^2 &= 0 \\ p &= 0 \vee p = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Met behulp van de grafiek of een tekenschema zie je dat de maximale lengte van AB gelijk is aan $L\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = 4 - x$.

a De lijn $x = k$ met $0 < k < 1$ snijdt de grafiek van f in P en die van g in Q.

Bereken de grootste lengte van lijnstuk PQ.

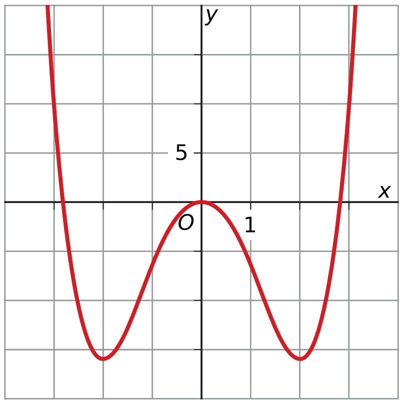
b De lijnen $x = -p$ en $x = p$ met $p > 0$ snijden de grafiek van f in A en in B. Bovendien snijden ze de x-as respectievelijk in D en in C.

Bereken exact de maximale oppervlakte van vierhoek $ABCD$.

Verwerken

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 8x^2$.
Bepaal met behulp van differentiëren alle extremen van deze functie.



Figuur 7

Opgave 8

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4000 - 10x^2$ en $g(x) = (x - 10)\left(x^2 - 400\right)$.

a Om de grafieken van beide functies in beeld te krijgen op je grafische rekenmachine moet je de instellingen nogal aanpassen. Bereken eerst de nulpunten van beide functies.

b Nu weet je welke waarden voor x je het beste kunt instellen. Bereken de extremen van beide functies.

c Je kunt nu de grafieken natuurlijk heel mooi in beeld krijgen. Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 9

Gegeven is voor elke waarde van a de functie $f_a(x) = x^4 - ax^2$.
Bekijk de grafieken van f_a voor enkele waarden van a met je grafische rekenmachine.

a Voor welke waarden van a is het minimum van deze functie gelijk aan -1?

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ gaat door het punt (0,4).
Voor welke waarde van a is dit het geval?

Opgave 10

Een fabrikant van zelfrijzend bakmeel verkoopt zijn product voor € 2,25 per kilogram. Voor de totale kosten TK voor productie en opslag geldt:

q (in honderden kg)	1	2	3	4	5	6
TK (in euro)	75	100	125	200	400	800

Tabel 1

a Hoeveel stijgen de kosten gemiddeld per kilogram als de productie toeneemt van 400 naar 500 kg?

b Voor de totale kosten heeft de fabrikant de formule $TK(q) = 10q^3 - 60q^2 + 130q$ met q in honderden kg en TK in euro laten opstellen. Ga na dat deze formule past bij de gegevens in de tabel.

c Toon aan dat voor de winst de formule $W = -10q^3 + 60q^2 + 95q$ geldt.

d Bereken de marginale winst bij een productie van 400 kilo met behulp van $MW(q) = W'(q)$. Welke betekenis heeft dit getal?

e Bereken de maximale winst met behulp van de functie MW.

Opgave 11

Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x$ en $l(x) = 1{,}5x + 3$.

Lijn l snijdt de grafiek van f in drie punten A, B en C met respectievelijk x-coördinaten -2, -1 en 3.

a De lijn $x = p$ met $-2 < p < -1$ snijdt de grafieken van f en l in de punten P en Q.
Bepaal exact de maximale lengte van PQ.

b De lijn $x = t$ met $-1 < t < 3$ snijdt de grafieken van f en l in de punten S en T.
Bepaal exact de maximale lengte van ST.

c Had je het antwoord van vraag b ook sneller kunnen vinden?

Opgave 12

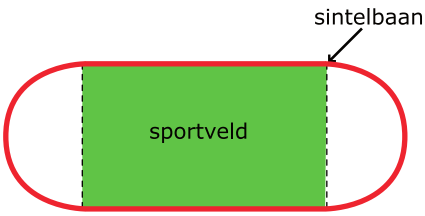
Voor elke positieve waarde van p bestaat er een functie van de vorm $f(x) = x^3 - 6px^2 - 16$.

a Onderzoek voor welke waarden van p functie f een maximum heeft.
Licht je antwoord toe.

b Voor welke waarde van p heeft de functie een extreme waarde van -32?
Is dat een minimum of een maximum?

Toepassen

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. Het sportveld is net zo lang als de rechte stukken. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.



Figuur 8

Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van dit sportveld als functie van de lengte of de breedte ervan of als functie van de straal van de cirkel. Als je dat doet kun je **differentiëren toepassen om extremen te bepalen**.

Opgave 13

Bekijk het probleem van de afmetingen bepalen van het zo groot mogelijke rechthoekige sportveld binnen een atletiekbaan.

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de oppervlakte van het sportveld A, de lengte ervan l en de straal van de cirkel r. Welke formules kun je nu opstellen?

c Stel een formule op voor $A(r)$.

d Voor welke waarde van r is $A(r)$ maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Geef ook de afmetingen van het sportveld. Rond je antwoorden af op één decimaal.

Opgave 14

Een fabrikant verpakt zijn hagelslag al jaren in doosjes met een vierkante bodem van 8 bij 8 cm. Ze hebben de vorm van een balk met een hoogte van 21 cm.
De fabrikant vraag zich af of hij de inhoud van het doosje kan vergroten door de afmetingen anders te kiezen, zonder meer karton te gebruiken. Het gaat erom de inhoud zo groot mogelijk te maken bij een gelijkblijvende oppervlakte. Het grondvlak blijft vierkant. Welke afmetingen moet de fabrikant kiezen?

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de zijde (in cm) van het grondvlak x en de hoogte h.

Welke twee formules kun je opstellen?

c Hoeveel karton heeft de fabrikant nodig voor zijn huidige doosjes?

Verwerk het antwoord in de oppervlakteformule en isoleer h uit de verkregen vergelijking.

d Stel een formule op voor de inhoud van de doosjes als functie van de zijde x.

e Voor welke waarde van x is de inhoud maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Rond je antwoord op drie decimalen.

f Bepaal de afmetingen van de doosjes met een maximale inhoud in millimeter nauwkeurig.

Opgave 15

Een boer omheint een rechthoekig weiland met een hek met een lengte van 200 meter. Een stal grenst aan het weiland en heeft een lengte van 12 meter. Waar de stal staat, hoeft geen omheining te komen.
Bepaal met behulp van differentiëren de maximale oppervlakte van het omheinde weiland.

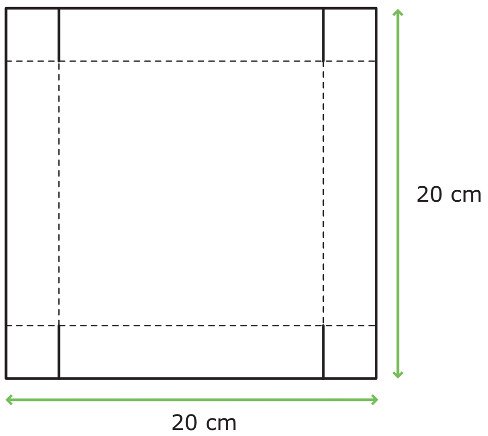
Opgave 16

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Stel dat je de zijde van het ingeknipte vierkantje x noemt.
Welke functie $I(x)$ kun je dan opstellen voor de inhoud van dit bakje?

b Welke waarden kan x allemaal aannemen?

c Bereken de maximale inhoud van het bakje.



Figuur 9

Testen

Opgave 17

Bereken bij deze functies de extremen.

a $f(x) = -x^4 + 2x^3$

b $f(x) = x^2(x-6)$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^5 - 80000x^2 + 2557$.

a Bereken de extremen met behulp van differentiëren.

b Met welke vensterinstellingen krijg je de grafiek van f goed in beeld op de grafische rekenmachine.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 0$?

Opgave 19

Bekijk de grafieken van $f(x) = x^3$ en $g(x) = x$. De lijn $x = p$ met $0 < p < 1$ snijdt de grafieken van f en g in de punten A en B.
Bereken exact de maximale lengte van AB.