2.3 Transformaties en afgeleiden

Inleiding

Je hebt gezien, hoe handig differentiëren is bij het berekenen van hellingsgetallen. Alleen kun je dit nog maar op een beperkt aantal functies toepassen. Eigenlijk alleen op functies die bestaan uit machtsfuncties die je bij elkaar optelt (of van elkaar aftrekt).

Je gaat de techniek van het differentiëren uitbreiden naar transformaties van functies.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het differentiëren van functies van de vorm $f(x)+c$, $f(x+c)$, $c \cdot f(x)$ en $f(cx)$;
- hellingswaarden benaderen met behulp van transformaties.

Voorkennis

- op een gegeven functie de vier basistransformaties toepassen, het bijpassende functievoorschrift opschrijven en de bijpassende grafiek tekenen;
- aan een gegeven functie herkennen uit welke functie hij door transformatie kan ontstaan en welke transformaties dit dan zijn;
- functies differentiëren met de machtsregel, de constanteregel en de somregel.

Verkennen

Opgave V1

De functie g en zijn afgeleide g' zijn transformaties van de standaardfunctie $f(x) = x^2$ en zijn afgeleide $f'(x) = 2x$.

Bekijk de applet

Maak met de applet of op je grafische rekenmachine de grafieken van de functies g en g' en vergelijk die met de grafiek van $f(x) = x^2$ en zijn hellingsgrafiek $f'(x)$.

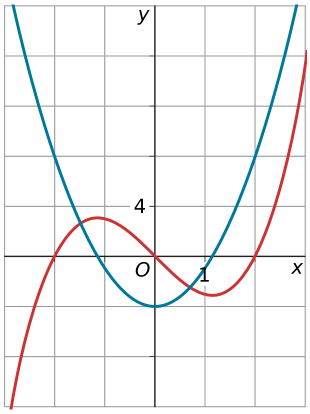
- $g_1(x) = (x-4)^2$
- $g_2(x) = x^2 - 3$
- $g_3(x) = 1{,}5 \cdot x^2$
- $g_4(x) = (0{,}5x)^2$
- $g_5(x) = 1{,}5(x-4)^2 - 3$

Leg uit hoe steeds de afgeleide van g ontstaat uit die van f.

Uitleg

Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 4x$ (rood) samen met de afgeleide $f'(x) = 3x^2 - 4$ (blauw).



Figuur 2

Onderzoek wat er met de afgeleide gebeurt als je op de gegeven functie een verschuiving of een vermenigvuldiging toepast. Ga met de grafische rekenmachine de volgende stappen na.

- Als je de grafiek van f met 2 ten opzichte van de x-as transleert, ontstaat de grafiek van $f_1(x) = f(x)+2$. Omdat de grafiek omhoogschuift, veranderen de x-waarden van de punten niet en de hellingen ook niet. De afgeleide van $f(x)+2$ is dus dezelfde als die van f.

  Kortweg: als $f_1(x) = f(x)+2$ dan is $f'_1(x) = f'(x)$.
- Als je de grafiek van f met 2 vermenigvuldigt ten opzichte van de x-as, worden alle functiewaarden 2 keer zo groot en krijg je $f_2(x) = 2 \cdot f(x)$. Alle hellingsgetallen worden ook 2 keer zo groot.

  Kortweg: als $f_2(x) = 2 \cdot f(x)$ dan is $f'_2(x) = 2 \cdot f'(x)$.
- Als je de grafiek van f met -2 ten opzichte van de y-as transleert, ontstaat de grafiek van $f_3(x) = f(x+2)$. Omdat de grafiek naar links verschuift, veranderen de hellingen niet, maar de punten worden wel 2 naar links geschoven. De afgeleide wordt dus $f'(x+2)$.

  Kortweg: als $f_3(x) = f(x+2)$ dan is $f'_3(x) = f'(x+2)$.
- Als je de grafiek van f met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigt ten opzichte van de y-as, krijg je de grafiek van $f_4(x) = f(2x)$. De hellingswaarden worden niet alleen 2 keer zo groot, maar ze horen bij x-waarden die de helft kleiner zijn.

  Kortweg: als $f_4(x) = f(2x)$ dan is $f'_4(x) = 2 \cdot f'(2x)$.

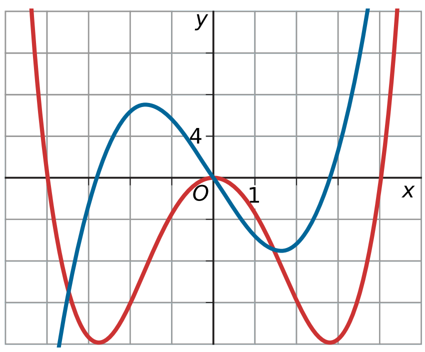
Opgave 1

Voer de transformaties die in de **Uitleg** staan beschreven uit op de grafiek van $f(x) = x^3 - 4x$ en haar afgeleide. Ga na dat je de resultaten vindt die daar zijn aangegeven.

Toon aan dat je op dezelfde resultaten komt wanneer je de functies van f_1, f_2, f_3 en f_4 uitschrijft en vervolgens differentieert.

Opgave 2

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}25x^4 - 4x^2$ samen met de grafiek van de afgeleide.



Figuur 3

a Maak de grafieken van f en $g_1(x) = f(x)+3$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_1?

A. $g'_1(x) = f'(x)$

B. $g'_1(x) = f'(x)+3$

b Maak de grafieken van f en $g_2(x) = 3 \cdot f(x)$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_2?

A. $g'_2(x) = f'(x)$

B. $g'_2(x) = 3 \cdot (f'(x))$

c Maak de grafieken van f en $g_3(x) = f(x+3)$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_3?

A. $g'_3(x) = f'(x)$

B. $g'_3(x) = f'(x+3)$

d Maak de grafieken van f en $g_4(x) = f(3 \cdot x)$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_4?

A. $g'_4(x) = f'(3 \cdot x)$

B. $g'_4(x) = 3 \cdot (f'(3 \cdot x))$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Gegeven is de grafiek van een functie f met haar afgeleide f'.

- Pas je op de grafiek een translatie van c eenheden ten opzichte van de x-as toe, dan krijg je de grafiek van $f(x)+c$ met als afgeleide $f'(x)$.
  De afgeleide van $f(x)+c$ is $f'(x)$.
- Pas je op de grafiek een translatie van - c eenheden ten opzichte van de y-as toe, dan krijg je de grafiek van $f(x+c)$ met als afgeleide $f'(x+c)$.
  De afgeleide van $f(x+c)$ is $f'(x+c)$.
- Pas je op de grafiek een vermenigvuldiging met c ten opzichte van de x-as toe, dan krijg je de grafiek van $c \cdot f(x)$ met als afgeleide $c \cdot f'(x)$.
  Dus de afgeleide van $c \cdot f(x)$ is $c \cdot f'(x)$.
- Pas je op de grafiek een vermenigvuldiging met $\frac{1}{c}$ ten opzichte van de y-as toe, dan krijg je de grafiek van $f(c \cdot x)$ met als afgeleide $c \cdot f'(c \cdot x)$.
  De afgeleide van $f(c \cdot x)$ is $c \cdot f'(c \cdot x)$.

Bij het berekenen van hellingswaarden of differentiëren van ingewikkelde functies kunnen deze transformatieregels van pas komen.

Voorbeeld 1

De afgeleide van $f(x) = x^4$ is $f'(x) = 4x^3$.
De afgeleiden van functies die door transformatie uit f ontstaan zijn te herleiden uit de afgeleide van f. Doe dit voor de volgende functies:

- $f_1(x) = x^4 + 2$
- $f_2(x) = 2x^4$
- $f_3(x) = (x+2)^4$
- $f_4(x) = (2x)^4$

Antwoord

- Als $f_1(x) = x^4 + 2$ dan is $f'_1(x) = 4x^3$.
- Als $f_2(x) = 2x^4$ dan is $f'_2(x) = 2 \cdot 4x^3 = 8x^3$.
- Als $f_3(x) = (x+2)^4$ dan is $f'_3(x) = 4(x+2)^3$.
- Als $f_4(x) = (2x)^4$ dan is $f'_4(x) = 2 \cdot 4(2x)^3 = 8 \cdot (2x)^3 = 64x^3$.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.
Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

a $g(x) = (x-7)^4$

b $h(x) = (3x)^4$

c $j(x) = 3(2x)^4 + 1$

d $k(x) = 5 + 2(6-2x)^4$

Voorbeeld 2

De functie $H(t) = 2^t$ heeft voor $t = 1$ een hellingswaarde van $H'(1) \approx 1{,}386$.
Welke hellingswaarde heeft de functie $K(t) = -3 \cdot 2^{0,5t} + 10$ voor $t = 2$?

Antwoord

Merk eerst op dat $K(t) = -3 \cdot H(0{,}5t) + 10$. Voor de afgeleide geldt daarom: $K'(t) = 0{,}5 \cdot -3 \cdot H'(0{,}5t)$.
Dit geeft: $K'(2) = 0{,}5 \cdot -3 \cdot H'(1) \approx 0{,}5 \cdot -3 \cdot 1{,}386 = -2{,}079$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = 5(x-1)^3 + 4$.

a De grafiek van f is door transformatie te herleiden uit die van $g(x) = x^3$. Welke transformaties moet je dan toepassen?

b Ga na dat $g'(1) = 3$. Bereken met behulp hiervan $f'(2)$.

Opgave 5

De grafiek van de functie $f(x) = 8^x$ maak je door de grafiek van $g(x) = 2^x$ te vermenigvuldigen in de x-richting.

a Laat zien dat $f(x) = g(3x)$.

b De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 0$ is bij benadering $y = 0{,}69x + 1$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Verwerken

Opgave 6

De volgende functies kunnen ontstaan door transformatie van een bijpassende basisfunctie. Bedenk telkens welke basisfunctie dat is en bepaal de afgeleide.

a $f(x) = 6(2x+3)^4$

b $g(x) = (x+2)^5 - 100$

c $s(t) = (2t+4)^3$

d $h(t) = 1 - 2(6-3t)^4$

Opgave 7

De afgeleide van $f(x) = 2^x$ is $f'(x) \approx 0{,}69 \cdot 2^x$. Van alle functies die kunnen ontstaan door transformatie uit f kun je hiermee de afgeleide bepalen.
Bepaal de afgeleide.

a $g(x) = 2^x - 5$

b $h(x) = 3 \cdot 2^x$

c $j(x) = 2^{x+4}$

d $k(x) = 2^{-3x}$

Opgave 8

Breng de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}5(x-2)^3 + 4$ met je grafische rekenmachine in beeld met de standaardinstellingen van het venster.

a De grafiek heeft een symmetriepunt. Welk punt is dat?

b Laat met behulp van de afgeleide zien waarom dit een symmetriepunt is.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn in het nulpunt van de grafiek van f.

Opgave 9

Plot de grafiek van de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$ en de grafiek van de standaardfunctie $g(x) = 2^x$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit die van g?

b De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 1$ is ongeveer $y = 1{,}38x + 0{,}62$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = -1$.

c Waarom kun je $f'(1)$ niet vinden met behulp van $g'(1)$?

Opgave 10

Gegeven is een functie $f(x)$ met $f'(1) = 2{,}75$.
Bereken $g'(1)$ als $g(x) = f(3x-2)$.

Toepassen

'In de buurt' van een bekend punt met een bekende helling van een grafiek kun je andere **functiewaarden benaderen**. Je gebruikt daarbij de raaklijn aan de grafiek.

Gebruik de definitie van de afgeleide om $f(x+h)$ (de waarde van de functie in de buurt van x) vrij te maken.

Uit $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ volgt $h \cdot f'(x) \approx f(x+h) - f(x)$ en dus

$f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)$.

Dit betekent dat $f(x+h)$ kan worden benaderd vanuit $f(x)$ met behulp van $f'(x)$. Daarvoor zijn alleen een vermenigvuldiging en een optelling nodig. Natuurlijk werkt het alleen voor waarden van h die 'heel dicht' bij 0 liggen.

Neem bijvoorbeeld bij $f(x) = -x^3 + 4x$.
Nu kun je $f(1{,}001)$ benaderen vanuit $f(1) = 3$ met behulp van $f'(1) = 1$.

Je vindt: $f(1{,}001) \approx f(1) + 0{,}001 \cdot f'(1) = 3 + 0{,}001 \cdot 1 = 3{,}001$.

Vergelijk dit maar eens met de werkelijke functiewaarde $f(1{,}001) \approx 3{,}000996999$.

Opgave 11

Gegeven is de functie in **Toepassen**.

a Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

b Met behulp van dit hellingsgetal kun je de functiewaarden in de buurt van $x = 1$ schatten. Ze zijn ongeveer gelijk aan de y-waarden van de raaklijn aan de grafiek. Benader $f(1{,}003)$.

c Benader op dezelfde wijze $f(0{,}98)$.

Opgave 12

Als in een punt van de grafiek van f geldt $f(2) = 0$ en $f'(2) = -8$, dan kun je de functiewaarden bij x-waarden die niet veel van 2 verschillen goed benaderen.

a Schat de functiewaarde bij $x = 2{,}003$.

b Waarom heeft het geen zin om op dezelfde manier als bij b de waarde van $f(2{,}5)$ te schatten?

Testen

Opgave 13

Differentieer de volgende functies

a $f(x) = (3x+6)^5 - 20$

b $g(x) = 16 - 2(x-1)^4$

c $K(q) = 200 + (60+3q)^3$

Opgave 14

De grafiek van de functie $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 5$ kan door transformatie ontstaan uit die van $f(x) = 3^x$.

a Welke transformaties moet je dan toepassen?

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ heeft de vergelijking $y = 1{,}1x + 1$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor dezelfde waarde van x.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren van getransformeerde functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
LET OP: de uitwerkingen zijn hier nogal omslachtig omdat de ‘kettingregel’ wordt gebruikt, terwijl je in dit onderdeel hebt leren werken met transformaties. Kijk daarom vooral of het eindantwoord overeen komt met jouw oplossing. Als dit niet zo is, ga dan terug naar Voorbeeld 1.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.