2.2 Differentiëren

Inleiding

Je hebt gezien dat bij een functie vaak een afgeleide (functie) is op te stellen.

Die afgeleide zegt iets over de veranderingen van de grafiek van de functie. En dus over de helling van die functie.
Het **differentiëren** is een handige techniek om afgeleiden te vinden.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een functie bepalen met behulp van differentieerregels;
- de hellingswaarde bepalen met de afgeleide;
- bepalen waar de grafiek een bepaalde hellingswaarde heeft.

Voorkennis

- met behulp van een differentiequotiënt de afgeleide (of hellingsfunctie) van een functie bepalen;
- een hellingsfunctie gebruiken om de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek op te stellen.

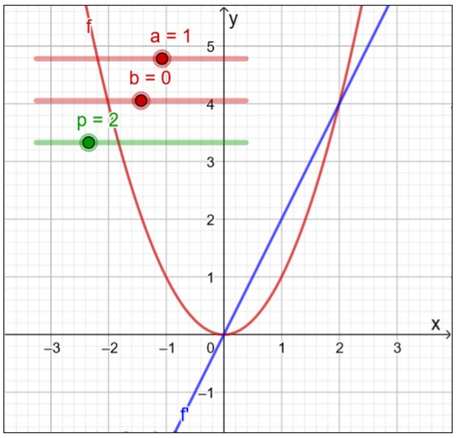
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

In de applet zie je (rood) de grafiek van functies f van de vorm $f(x) = a \cdot x^p + b$.
In blauw zie je de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie, de afgeleide.

Stel je in $a = 1$, $b = 0$ en $p = 2$ dan heb je de grafiek van $f(x) = x^2$.



Figuur 2

a Ga na, dat dan de gevonden hellingsgrafiek overeen komt met de grafiek van $y = 2x$.
Controleer dat je deze afgeleide ook krijgt door het differentiaalquotiënt op $[x, x+h]$ te berekenen.

b Bekijk ook andere kwadratische functies van de vorm $f(x) = ax^2 + b$. Probeer vooraf te bedenken welk voorschrift bij de hellingsfunctie zou moeten passen. En controleer dan of je gelijk hebt.
Doe hetzelfde voor derdegraadsfuncties van de vorm $f(x) = ax^3 + b$.
En voor functies van de vorm $f(x) = ax^4 + b$ en $f(x) = ax^5 + b$.
Werk bijvoorbeeld in tweetallen en bedenk een manier om de afgeleide te vinden zonder met differentiequotiënten te werken.

Uitleg

Het differentiaalquotiënt van een machtsfunctie berekenen kost vaak veel tijd. Maar het kan sneller.

De afgeleide van de functie $f(x) = ax^2$ is:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2ax + ah) = 2ax$$

De afgeleide van $f(x) = ax^2$ is $f'(x) = 2ax$ voor elke waarde van a.
Op dezelfde manier blijkt: de afgeleide van $f(x) = ax^3$ is $f'(x) = 3ax^2$ voor elke waarde van a.
Misschien zie je een regelmaat.
De afgeleide van $f(x) = ax^n$ is $f'(x) = nax^{n-1}$ voor elke waarde van a.

Het gebruiken van een regel om een afgeleide te bepalen heet differentiëren. Deze specifieke regel heet de machtsregel.

Uit deze regel volgt dat voor de constante functie $f(x) = c$ de afgeleide $f'(x) = 0$ is. Dit heet de constanteregel.

Op vergelijkbare wijze is er een regelmaat te vinden in de afgeleide bepalen van een som van functies. Die regel zegt dat je die term voor term kunt differentiëren. Voor bijvoorbeeld $f(x) = 0{,}1x^3 - 3x^2 + 25x + 10$ geldt:
$f'(x) = 3 \cdot 0{,}1x^{3-1} - 2 \cdot 3x^{2-1} + 1 \cdot 25x^{1-1} + 0 = 0{,}3x^2 - 6x + 25$

De afgeleide van de som van x-machten is de som is van de afzonderlijke afgeleiden. Deze regel heet de somregel.

Opgave 1

De afgeleide van $f(x) = cx^3$ bereken je door het differentiequotiënt op het interval $[x, x+h]$ te bepalen en h naar 0 te laten naderen.

a Toon aan dat voor de afgeleide van $f(x) = cx^3$ geldt $f'(x) = 3cx^2$.

b Bepaal met behulp van deze algemene regel voor een derdemachtsfunctie de afgeleide van $f(x) = 5x^3$, $g(x) = -2\frac{1}{5}x^3$ en $h(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

c Bereken met de algemene machtsregel en de somregel de afgeleide van $h(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 10$.

d Bewijs de somregel door aan te tonen dat de afgeleide van $f(x) = u(x) + v(x)$ is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
Gebruik hierbij de definitie van een afgeleide: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Opgave 2

Bepaal de afgeleide door differentiëren.

a $f(x) = 12x^5$

b $g(x) = 12x^5 + 20$

c $h(x) = 12x^5 + 20x^3$

d $k(x) = 12x^5 + 20x^3 + 5x^2 - 10x + 15$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afgeleide van een functie $y = f(x)$ is:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Hieruit zijn algemene regels af te leiden waarmee je de afgeleide sneller kunt vinden. Je noemt ze **differentieerregels**. Het toepassen ervan heet **differentiëren**.

- De **constanteregel** is de differentieerregel voor constante functies.
  Als $f(x) = c$ dan geldt: $f'(x) = 0$.
- De **machtsregel** is de differentieerregel voor machtsfuncties.
  Als $f(x) = cx^n$ dan geldt voor elke waarde van c en voor gehele positieve waarden van n: $f'(x) = ncx^{n-1}$.

Bewijs 1

Deze stelling geldt voor $n = 1$, want $f(x) = cx^1$ geeft $f'(x) = c \cdot 1x^{1-1} = cx^0 = c$. (Immers dan is f een lineaire functie met hellingsgetal c.)

Neem nu eens aan dat de formule voor een bepaalde n geldt. En stel dat je kunt aantonen dat daaruit volgt dat hij dan ook voor $n+1$ geldt. Dan geldt hij voor alle gehele positieve waarden van n, want uit de geldigheid voor $n = 1$ volgt dan die voor $n = 1 + 1 = 2$ en daaruit die voor $n = 2 + 1 = 3$, enzovoort...

Dus moet worden aangetoond: uit de regel geldt voor n volgt dat hij geldt voor $n+1$.
Je neemt dus aan dat als $f(x) = cx^n$ dan is $f'(x) = ncx^{n-1}$, ofwel:

$\lim_{h \to 0} \frac{c(x+h)^n - cx^n}{h} = ncx^{n-1}$

Nu naar $n+1$.
Aangetoond moet worden: als $f(x) = cx^{n+1}$ dan is $f'(x) = (n+1)cx^n$.

Dat doe je zo:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h)^{n+1} - cx^{n+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) \cdot c(x+h)^n - x \cdot cx^n}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(x \cdot c(x+h)^n - x \cdot cx^n) + h\left(c(x+h)^n\right)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h)^n - cx^n}{h} \cdot x + c(x+h)^n = ncx^{n-1} \cdot x + cx^n = ncx^n + cx^n = (n+1)cx^n$

Je ziet dat je gebruik moet maken van de geldigheid van de stelling voor n.
Daaruit volgt dus de geldigheid voor $n+1$.

Omdat de stelling geldig is voor $n = 1$, is hij dat nu ook voor $n = 2,3,4,5,...$
Deze manier van bewijzen noem je wel het **dominoprincipe**: als de eerste steen omvalt, vallen alle daarop volgende stenen ook. In de wiskunde heet deze manier van bewijzen: **de bewijsmethode met volledige inductie**. Daarbij bewijs je een stelling voor een bepaalde gehele waarde van n. Vervolgens bewijs je dat vanuit de geldigheid voor een willekeurige n ook de geldigheid voor $n+1$ volgt. Als dat lukt, heb je de stelling bewezen voor elke gehele n vanaf de gehele waarde waarmee je begon. En dat is ons hier gelukt...

- De **somregel** is de differentieerregel voor de afgeleide van de som (of het verschil) van twee functies. Die afgeleide is de som van de afgeleiden van die functies, dus als $f(x) = u(x) + v(x)$ dan geldt: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Bewijs 2

Gegeven is $f(x) = u(x) + v(x)$.
De afgeleide is:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \left(\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right) \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$
De somregel geldt ook voor het verschil van twee functies. Neem dan $-v(x)$ in plaats van $v(x)$. Het bewijs is verder vergelijkbaar.

Er zijn voor de afgeleide functie van $y = f(x)$ meerdere notaties:

$f'(x)$, of $y'(x)$, of $\frac{dy}{dx}$, of $\frac{df(x)}{dx}$, of $\frac{d}{dx}f(x)$.

Voorbeeld 1

Bepaal de afgeleide van de functie $f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x - 100$.

Antwoord

De afgeleide is:

$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} + 4 \cdot 2x^{2-1} - 12 \cdot 1x^{1-1} - 0 = 3x^2 + 8x - 12$

Opgave 3

Bepaal de afgeleide van de volgende functies door te differentiëren met behulp van de differentieer-regels.

a $f(x) = 10x^3 - 60x + 100$

b $f(x) = 15 + 2x - 5x^2 - 10x^4$

c $f(x) = x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right)$

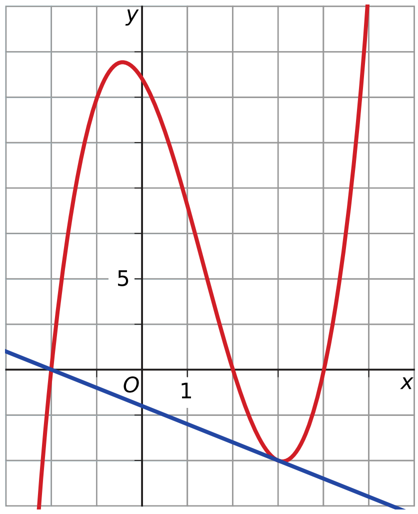
d $f(x) = \left(x^3 - 4\right)(2 - 3x)$

Opgave 4

De constante functie $f(x) = c$ kun je ook beschouwen als een machtsfunctie. Ga na dat dan ook de machtsregel geldt.

Voorbeeld 2

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van de functie $g(x) = \left(x^2 - 4\right)(x - 4)$ voor $x = 3$.



Figuur 3

Antwoord

Voor de vergelijking van de raaklijn heb je het hellingsgetal $g'(3)$ nodig.
Deze functie is geschreven als het product van twee functies en niet als som. Schrijf het functievoorschrift eerst als een som (verschil) van machtsfuncties en constante functies. Haakjes wegwerken geeft:
$g(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

De afgeleide is:
$g'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 4x^1 - 1 \cdot 4x^0 + 0 = 3x^2 - 8x - 4$

De vergelijking van de raaklijn heeft de vorm $y = ax + b$.

$g'(3) = -1$
$g(3) = -5$
$a = -1$, dus de vergelijking is $y = -x + b$.

De raaklijn gaat door het punt $(3, -5)$, dat vul je in de vergelijking in:

$$\begin{aligned} -5 &= -1 \cdot 3 + b \\ b &= -2 \end{aligned}$$

De vergelijking van de raaklijn is: $y = -x - 2$.

Opgave 5

Gegeven is de functie $y = \left(x^2 - 4\right)(x - 6)$.

a Een functievoorschrift in deze vorm is handig als je de nulpunten van de functie wilt bepalen. Bereken die nulpunten.

b Bereken de afgeleide $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ van deze functie.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 2$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie g met voorschrift: $g(x) = 0{,}5x^3 - 3x - 1$.
Bereken de punten A en B van de grafiek van g waarin de helling gelijk is aan 3.

Antwoord

Differentieer de functie: $g'(x) = 3 \cdot 0{,}5x^2 - 1 \cdot 3x^0 + 0 = 1{,}5x^2 - 3$.

De helling van de grafiek van g is 3 wanneer $g'(x) = 3$:

$$\begin{aligned} 1{,}5x^2 - 3 &= 3 \\ 1{,}5x^2 &= 6 \\ x^2 &= 4 \\ x &= -2 \vee x = 2 \end{aligned}$$

De bijbehorende y-coördinaten zijn $g(-2) = 1$ en $g(2) = -3$.
De gevraagde punten zijn $A(-2, 1)$ en $B(2, -3)$.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 10x - 35$.

a Bereken met behulp van de afgeleide het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

b Er zijn punten op de grafiek van f waarin de helling de waarde 10 heeft.
Bereken de coördinaten van die punten.

Verwerken

Opgave 7

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = x^3 - 4x$

b $s(t) = 60t - 4{,}9t^2$

c $H(t) = 2(t^2 - 4)$

d $y = 5 - (x-3)^2$

e $W = (-3t^4 + t)(t^5 - 2t^3) + 3t^9$

Opgave 8

a Gegeven is $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2$.
Bereken met behulp van de afgeleide het hellingsgetal van f voor $x = 2$.

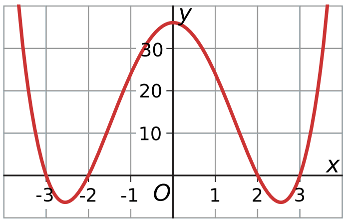
b Gegeven is $W(q) = -q^3 + 3q^2 + 3q + 6$.
Bereken door differentiëren het differentiaalquotiënt van W voor $q = -1$.

c Gegeven is $v(t) = t(t-1)^2$. Bereken $v'(3)$.

d Gegeven is $g(x) = (1-x)^3$.
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan g in $x = -2$ is gelijk aan -27. Toon dit aan.

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$



Figuur 4

a Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken het snijpunt van de raaklijnen aan de grafiek van f voor $x = -2$ en voor $x = 2$.

d Los exact op: $f'(x) = 0$

e Wat betekent $f'(x) = 0$ voor de grafiek van f?

Opgave 10

Differentieer.

a $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

b $f(x) = ax^3 + b^2$

c $g(p) = 3{,}4p^2q - 7pq + q - 4$

d $g(q) = 3{,}4p^2q - 7pq + q - 4$

e $K(x) = (3x^2 - 2a)(ax - 1)$

Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x - 24$. Op de grafiek van f ligt punt A met $x_A = -6$.

a Bereken algebraïsch het hellingsgetal van de grafiek van f in het snijpunt met de y-as.

b Bereken de coördinaten van de toppen met behulp van de afgeleide.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn door punt A op de grafiek van f.

d Bereken de punten van de grafiek van f waarvoor het hellingsgetal gelijk is aan 6.

Toepassen

Opgave 12: De baan van een kogel

Als een voorwerp onder een bepaalde hoek wordt afgeschoten, dan is zijn baan parabolisch als je geen rekening hoeft te houden met de luchtweerstand. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de grafiek van de functie $h(x) = 2{,}4 - 0{,}01(x-12)^2$. Hierin is h de hoogte van het afgeschoten voorwerp boven de grond in meter en x de afstand over de grond tot recht onder het afgeschoten voorwerp in meter.

a Op welke hoogte werd het voorwerp afgeschoten?

b Bereken $h'(0)$.

c Wat betekent dit getal voor de kogelbaan?

d Bereken het punt van de kogelbaan waarin $h'(x) = 0$.

e In het hoogste punt van de kogelbaan is de afgeleide nul. Toch beweegt de kogel daar met een zekere snelheid. Kun je dit verklaren?

Opgave 13: Gemiddelde totale kosten

Voor de productiekosten van een bepaald artikel geldt: $TK = 1200 + 0{,}2q^2$. Hierin is q het aantal geproduceerde eenheden van dat artikel en stelt TK de totale kosten in euro voor. De productiekosten per eenheid worden gegeven door $GTK = \frac{TK}{q}$. Je noemt dit wel de gemiddelde totale kosten.

a Druk de gemiddelde totale kosten uit in q.

b Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van GTK bekijken. Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van GTK? Welke economische betekenis heeft deze asymptoot?

c Je kunt bij deze functie (nog) geen afgeleide bepalen. Maar je kunt er wel een (benadering van de) hellingsgrafiek bij tekenen met je grafische rekenmachine. Teken die hellingsgrafiek en bepaal met behulp daarvan bij welke productie de gemiddelde totale kosten zo laag mogelijk zijn.

d Welke waarde benadert de helling van de grafiek van GTK als de productie heel erg groot is? En welke betekenis heeft dat voor de productiekosten per eenheid?

Testen

Opgave 14

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = x^6 + 8x - 12$

b $f(x) = (2x+1)^2$

c $f(a) = 12a - a^2(b-a)$

Opgave 15

Op de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}5x(5-x)(x+3)$ liggen de punten $A(-1,-6)$ en $B(1,8)$.

a Bereken het hellingsgetal van deze functie in het punt A met behulp van de afgeleide.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt B.

c Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. Bereken exact de x-coördinaten van die punten.

d Er zijn twee punten op de grafiek van f die een raaklijn hebben evenwijdig aan de lijn $l(x) = -2{,}5x+3$. Bereken exact de x-coördinaten van die punten.

Opgave 16

y is een functie van x waarvoor geldt: $y = x^3 - 25{,}5x^2 + 180x + 120$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Deze afgeleide heeft twee nulwaarden. Welke betekenis hebben die nulwaarden voor de functie?

c Bereken de nulwaarden van de afgeleide y'.

d Voor welke waarden van x is de functie dalend?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.