1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Veranderingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- toenemende, afnemende of constante stijging of daling — extremen — toenametabel — vaste stapgrootte — toenamediagram
- gemiddelde verandering — differentiequotiënt — koorde
- veranderingssnelheid in een punt — differentiaalquotiënt — raaklijn
- hellingsgrafiek — hellingsfunctie — tekenschema

Activiteitenlijst

- bij een functie (of grafiek) aangeven waar hij (toenemend, afnemend) stijgt en daalt; — bij een functie (of grafiek) een toenamediagram tekenen en omgekeerd bij een toenamediagram mogelijke grafieken van een bijpassende functie tekenen;
- bij een functie (of grafiek) het differentiequotiënt op een gegeven interval berekenen en de betekenis daarvan omschrijven;
- bij een functie (of grafiek) het differentiaalquotiënt voor een gegeven invoerwaarde berekenen en de betekenis ervan omschrijven — het hellingsgetal van een raaklijn aan een grafiek berekenen;
- bij een functie (of grafiek) een hellingsgrafiek tekenen — uit een hellingsgrafiek (of tekenschema) eigenschappen van de functie (stijgen, dalen, extremen) aflezen — hellingsfuncties opstellen.

Achtergronden

Het wiskundig beschrijven van veranderingen is nog niet zo heel oud. Eigenlijk begon het allemaal met de Fransman **Nicole Oresme (1323—1382)** die de ‘grafiek’ bedacht om het bewegen van voorwerpen langs een rechte lijn te beschrijven.

Later gebruikte Galileo Galileï (1564—1642) de grafieken van Oresme om er de vrije val van een voorwerp in vacuüm mee weer te geven. En **Isaac Newton (1642—1727)** en **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716)** bedachten een goede techniek om veranderingen te berekenen: de ‘differentiaalrekening’.

Figuur 1 Galileo Galileï (Wikipedia)

Testen

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, gemaakt met GeoGebra.

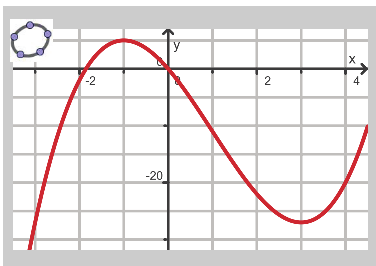
a Van welke soort daling is er sprake op het interval [0,1]?

b Bereken het differentiequotiënt op dit interval en beschrijf de betekenis van dit getal.

c Bereken de helling van de grafiek in het punt met $x = 1$ met een rij differentiequotiënten. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

d Stel de vergelijking op van de raaklijn aan f in het punt met $x = 1$.

e Neem de grafiek over en schets de hellingsgrafiek bij deze functie.



Figuur 2

Opgave 2

De hoogte van een vuurpijl die je van de grond afschiet, wordt gegeven door $h(t) = 60t - 5t^2$ met h de hoogte in meters en t de tijd in seconden na het afschieten.

a Na 10 seconden ontploft de vuurpijl. Op welke hoogte is dat?

b Teken een bijpassend toenamediagram van 0 tot 6 met stapgrootte 1.

c Uit het toenamediagram kun je aflezen op welk tijdstip de vuurpijl het hoogste punt in zijn baan bereikt. Leg uit hoe.

d Bereken de gemiddelde snelheid van de vuurpijl over de eerste zes seconden.

e Teken de grafiek van de snelheid $h'(t)$ van de vuurpijl. Maak eerst een tabel met hellingsgetallen.

f De grafiek van de snelheid die je bij e hebt getekend moet een rechte lijn zijn. Stel bij die rechte lijn een formule op en bereken met die formule de snelheid op het moment van ontploffen.

Opgave 3

Het migratiesaldo van R geeft het verschil tussen het aantal mensen dat in R komt wonen en het aantal mensen dat uit R vertrekt. Het geboorteoverschot is het verschil van het aantal geboorten en het aantal overledenen in R. In deze grafiek zie je beiden voor de jaren 2000 tot en met 2004.

a Met hoeveel mensen is het aantal inwoners in R in het jaar 2000 toegenomen?

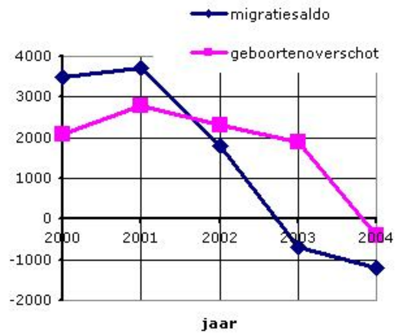
b In welk jaar is het aantal inwoners in deze stad afgenomen?

c Het aantal inwoners van R was aan het begin van het jaar 2000 ongeveer 72600 (op honderdtallen afgerond). Teken een grafiek van het aantal inwoners in R in de jaren 2000 tot en met 2004.

d Hoe groot was het aantal inwoners op 1 januari 2005?

Bevolking van R

jaar	migratiesaldo	geboortenoverschot
2000	3500	2100
2001	3700	2800
2002	1800	2300
2003	-700	1900
2004	-1200	-400



Figuur 3

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}25x^2 + x$.

a Bereken met het differentiequotiënt op het interval $[2, 2+h]$ exact het differentiaalquotiënt voor $x = 2$.

b Bepaal de formule van de hellingsfunctie met behulp van een differentiequotiënt.

Opgave 5

Gegeven is de functie f door $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 2x$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de x-as. Noem de snijpunten van links naar rechts A, B en C.

b Op de grafiek van f ligt een punt D met x_D precies midden tussen x_A en x_B.

Toon aan dat CD de raaklijn is in punt D.

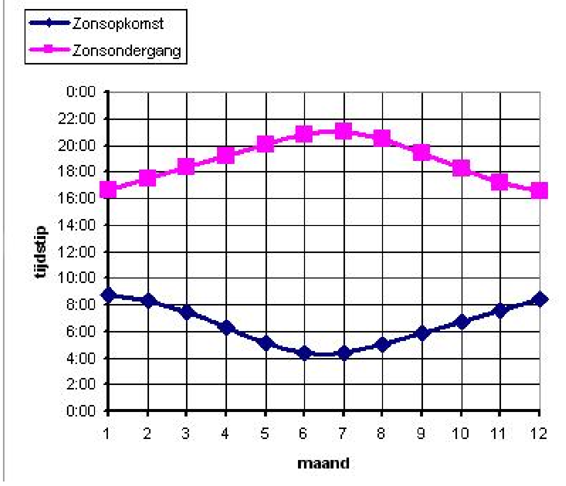
Toepassen

Opgave 6: Daglengte

Door het KNMI worden de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang gedurende het jaar bijgehouden. Via internet kun je actuele informatie over dit onderwerp vinden. Hier zie je een tabel en een grafiek voor Amsterdam in een bepaald jaar gemaakt in MS-Excel. Je ziet dat de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang in de loop van het jaar veranderen. Bovendien is de snelheid waarmee die veranderingen plaatsvinden ook veranderlijk. In de tweede helft van de maand juni bijvoorbeeld verandert het tijdstip van zonsondergang maar weinig per dag. Maar in september is die verandering per dag juist behoorlijk groot. Ook de daglengte (verschil tussen zonsopkomst en zonsondergang) verandert in de loop van het jaar. En ook die verandering gaat soms sneller en soms minder snel... Een goede manier om de veranderingen nauwkeurig te bekijken is een toenamediagram bijvoorbeeld per maand.

Zonsopkomst en zonsondergang in Nederland
De tijdstippen gelden steeds voor de eerste dag van de maand
Alle tijden zijn in M.E.T. (geen zomertijd dus)

maand	opkomst	ondergang
1	8:48	16:39
2	8:20	17:28
3	7:26	18:20
4	6:15	19:14
5	5:10	20:05
6	4:25	20:50
7	4:24	21:03
8	5:02	20:30
9	5:52	19:27
10	6:41	18:17
11	7:35	17:12
12	8:26	16:32



Figuur 4

a Het tijdstip van zonsopkomst verandert per dag. In welke maanden verandert het tijdstip van zonsopkomst het snelst per dag? Hoe zie je dat aan de grafiek?

b Ook het tijdstip van zonsondergang verandert per dag. Verandert het tijdstip van zonsondergang het snelst per dag in dezelfde maanden als dat van zonsopkomst? Kun je dit verklaren?

c De daglengte-grafiek is af te leiden uit die van zonsopkomst en zonsondergang. Hoe?

d In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder?

e Teken zelf in Excel een grafiek en een toenamediagram van de daglengte in de loop van het jaar. Neem de gegevens over. Neem voor het toenamediagram een stapgrootte van 1 maand.

f De daglengte verandert dagelijks. In welke maanden verandert de daglengte het snelst? Hoe zie je dat aan de grafiek en hoe aan het toenamediagram?

g In bepaalde maanden lijkt de daglengte wel vrijwel constant. In welke maanden is dat het geval? En hoe zie je dat aan het toenamediagram?

h In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?

Opgave 7: Snelheid, versnelling

Voor de snelheid v in meter per seconde van een bewegend voorwerp geldt: $v = 2{,}4t$ met t de tijd in seconden.

a De grafiek van v is de hellingsgrafiek van de grafiek van de afgelegde weg $s(t)$ waarin s in meters is uitgedrukt. Neem aan, dat $s(0) = 0$. Maak een zo nauwkeurig mogelijke grafiek van $s(t)$.

b Bij de grafiek van $v(t)$ hoort ook een hellingsgrafiek. Teken die hellingsgrafiek.

c Wat stelt de hellingsgrafiek van $v(t)$ voor?

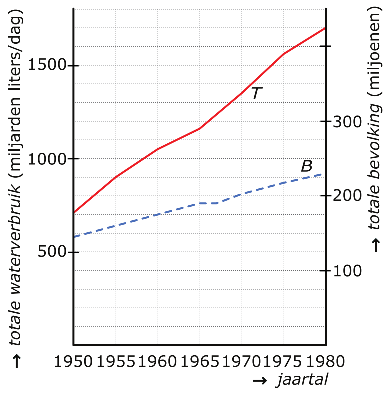
d Voor de afgelegde weg geldt de formule $s(t) = 1{,}2t^2$.
Laat met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[t,t+h]$ zien, dat de gegeven functie v inderdaad de hellingsfunctie van s is.

Examen

Opgave 8: Schoon drinkwater

Overal op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig. Deze opgave gaat over het waterverbruik in de Verenigde Staten vanaf 1950.

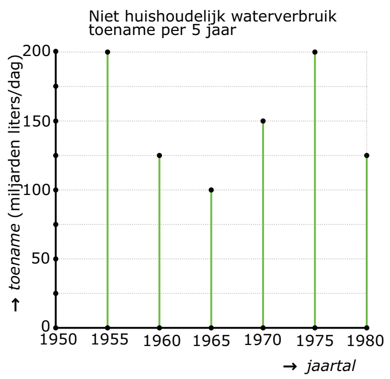
In de grafiek staan gegevens over het totale jaarverbruik (T) en de grootte van de bevolking (B) van de V.S. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat in 1980 het totale waterverbruik ongeveer 1680 miljard liter per dag bedroeg, en dat de bevolking in dat jaar ongeveer 230 miljoen mensen telde.



Figuur 5

a Laat zien dat het totale verbruik per jaar in 1975 gemiddeld ongeveer 2,6 miljoen liter water per inwoner was.

Het aantal liters in opgave a is erg groot. Dat komt vooral door het niet-huishoudelijk waterverbruik. In 1950 was het totale waterverbruik (700 miljard liter per dag) opgebouwd uit 625 miljard liter water voor niet-huishoudelijk gebruik en 75 miljard liter per dag voor huishoudelijk verbruik.



Figuur 6

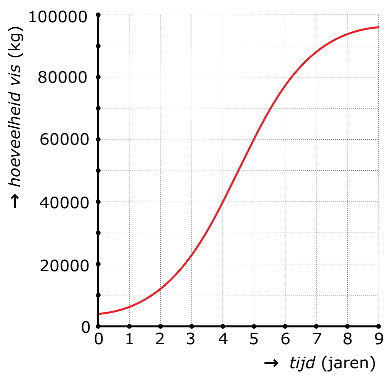
b Bekijk ook het toenamediagram van het waterverbruik per dag in de V.S. voor niet-huishoudelijk gebruik.
Onderzoek of het niet-huishoudelijk verbruik als percentage van het totale waterverbruik per dag in 1980 groter was dan in 1950.

c Bij een onderzoek schatte men dat de toename van het totale waterverbruik elke 5 jaar zou liggen tussen 110 en 200 miljard liter per dag. Tussen welke twee getallen ligt volgens deze veronderstelling het totale waterverbruik in de V.S. in 2010?

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)

Opgave 9: Viskwekerij

In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. De grafiek geeft een model van de groei van de visstand.



Figuur 7

a Teken het toenamediagram voor intervallen van een jaar, te beginnen met het interval [1,2].

De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens de grafiek. Welk advies zou je de viskweker geven over:

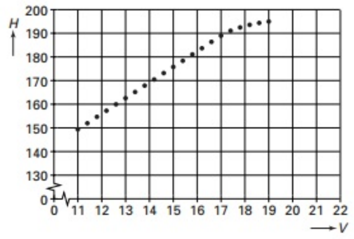
- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten;
- de grootte van de jaarlijkse vangst?

b Geef bij dit advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.

(bron: examen vwo wiskunde A in 1989, eerste tijdvak)

Opgave 10: Hartfrequentie

Een hardloper doet een test op een loopband. Na elke 300 meter die de hardloper heeft afgelegd op de loopband wordt er overgeschakeld op een hogere snelheid. De eerste 300 meter loopt hij met een constante snelheid van 11 km per uur. Na elke 300 meter wordt deze snelheid met 0,4 km per uur verhoogd. Een hartslagmeter registreert na elke 300 meter de hartfrequentie van de hardloper. De hartfrequentie van een mens is het aantal slagen dat het hart per minuut maakt. In de figuur zijn de resultaten weergegeven.



Figuur 8

H is de hartfrequentie in slagen per minuut en V is de snelheid in km per uur. Voor snelheden tussen 11 en 17 km per uur is het verband tussen V en H bijna lineair. De hartfrequentie waarbij het lineaire verband verloren gaat, heet het omslagpunt. Voor de hardloper van de figuur ligt het omslagpunt bij een hartfrequentie van ongeveer 190 slagen per minuut. Bij een grotere inspanning is het hart minder goed in staat om voldoende slagen te maken.

Het verband tussen V en H wordt voor de hardloper bij benadering gegeven door de volgende twee formules:

$H = 76{,}8 + 6{,}6V$ voor $11 \leq V \leq 17$

$H = 200 - (0{,}0545V - 0{,}836)^{-1}$ voor $V \geq 17$

De grafiek van het verband tussen V en H bestaat voor de hardloper uit twee delen die in het omslagpunt op elkaar aansluiten: beide formules geven bij $V = 17$ bij benadering dezelfde waarde voor H.

Onderzoek of de beide formules bij $V = 17$ ook ongeveer dezelfde helling geven.

(bron: examen havo wiskunde B2 in 2003, tweede tijdvak)