1.3 Differentiequotiënt

Inleiding

Je hebt veranderingen in grafieken leren beschrijven in woorden en met toenamediagrammen. Bij toenamediagrammen moet je met een vaste stapgrootte werken. Maar als je wilt nagaan of een wielrenner de eerste 10 minuten gemiddeld net zoveel heeft afgelegd als de volgende 15 minuten, heb je met ongelijke intervallen te doen. In dat geval werk je met gemiddelde veranderingen.

Je leert in dit onderwerp

- de betekenis van het begrip differentiequotiënt kennen;
- tussen twee punten uit een tabel of een grafiek het differentiequotiënt bepalen;
- het differentiequotiënt van een functie op een gegeven interval berekenen;
- werken met toepassingen van het differentiequotiënt.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, afnemende of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met toenamediagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel:

tijd (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 1

Figuur 1

a Is hij de eerste 8 km gemiddeld sneller of langzamer dan in de volgende 4 km? Waaraan zie je dat?

b Waarom is er bij deze situatie eigenlijk geen toenamediagram te maken?

Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd, op de verticale as de afgelegde afstand. Niet alle lijnstukken zijn even steil.

c Hoe kun je de helling van zo'n lijnstuk in een getal uitdrukken?

d Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de periode van 12 kilometer tot en met 18 kilometer.

e Wat betekent het getal dat je zojuist hebt gevonden voor de wielrenner?

Uitleg

Als een zeilwagen start en de windkracht constant is, dan neemt zijn snelheid toe. Veronderstel dat voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt: $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$. Hierin is t de tijd in seconden. Bekijk de grafiek.
Na 2 seconden is de afgelegde afstand $s(2) = 4{,}8$ m.
Na 6 seconden is de afgelegde afstand $s(6) = 43{,}2$ m.
In die 4 seconden is er $s(6) - s(2) = 43{,}2 - 4{,}8 = 38{,}4$ m afgelegd.

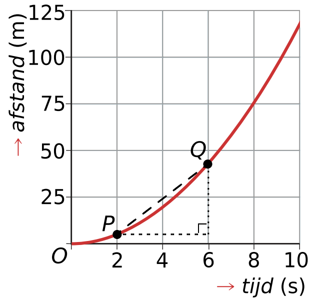
De gemiddelde snelheid is: $\frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.

Je berekent de gemiddelde snelheid, ofwel de gemiddelde verandering van plaats, door het verschil in afstand te delen door het verschil in tijd:

gemiddelde snelheid $= \frac{\Delta\,\text{afstand}}{\Delta\,\text{tijd}}$.

Het teken Δ (een Griekse letter D) staat voor differentie, wat verschil betekent. Dit getal is de helling van het lijnstuk tussen de punten die horen bij $t = 1$ seconde en bij $t = 4$ seconden.

Op het interval $[2,6]$ verandert $s(t)$ gemiddeld met: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(6)-s(2)}{6-2} = \frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.



Figuur 2

Dit heet een differentiequotiënt ('differentie' is 'verschil' en een quotiënt is de uitkomst van een deling).
De gemiddelde verandering van s op een gegeven interval van t is het differentiequotiënt over dat interval.
Het is ook de helling van het lijnstuk PQ.

Opgave 1

Voor de afgelegde afstand s (in meter) van de zeilwagen in de geldt dat $s = 1{,}2t^2$. Hierin is t de tijd in seconden.

a Bereken de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0,6]$.

b Bereken ook de gemiddelde snelheid op het interval $[6,10]$.

c Op welk van beide intervallen was de gemiddelde snelheid van de zeilwagen het hoogst?

Opgave 2

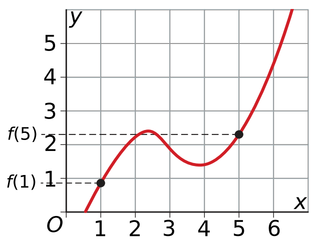
In het algemeen heb je te maken met een functie als $y = f(x)$.
Hier zie je een grafiek van een functie f.
Bekijk het interval $[1,5]$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op dit interval.
Lees functiewaarden af uit de grafiek.

b Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[2,4]$.

c Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de punten $(1, f(1))$ en $(6, f(6))$.

d Geef een interval waarop de gemiddelde verandering 2 m/s is.



Figuur 3

Theorie en voorbeelden

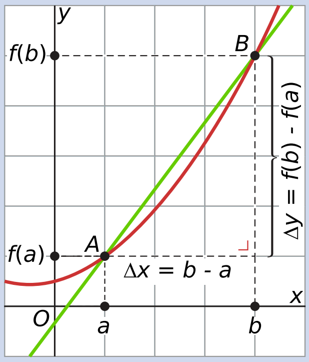
Om te onthouden

Bekijk de grafiek van de functie $y = f(x)$.

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a,b]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Deze verhouding tussen het verschil van de functiewaarden in de uiteinden van het interval en het verschil van beide x-waarden noem je het **differentiequotiënt** van de functie f op het interval $[a,b]$. Differentie betekent verschil en quotiënt is de uitkomst van een deling.

In de grafiek van f is dit differentiequotiënt gelijk aan het **hellingsgetal** of de **richtingscoëfficiënt** van de lijn door $A(a,f(a))$ en $B(b,f(b))$.



Figuur 4

Voorbeeld 1

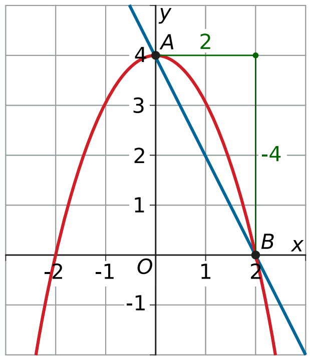
Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - x^2$.

Bereken het differentiequotiënt op het interval [0,2] en beschrijf de betekenis van dit getal.

Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval [0,2] is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0-4}{2} = -2$.

Je ziet dat het differentiequotiënt gelijk is aan het hellingsgetal van het lijnstuk AB. Het is de gemiddelde verandering van de functiewaarden op het interval [0,2]. Het geeft dus de toename of de afname van $f(x)$ per eenheid van x weer.



Figuur 5

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval [-2,1].

b Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op het interval [-1,1].

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval [2,5].

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval [-3,6].

c Geef een interval waarop de gemiddelde verandering van f gelijk is aan 0.

Voorbeeld 2

Een skater houdt zijn tussentijden bij.

tijd (min)	0	10	15	21
afstand (km)	0	3,5	5,5	8,0

Tabel 2

Gedurende de eerste 10 minuten skatet hij 3,5 km. Gedurende de volgende 5 minuten skatet hij 2 km. Op welk van deze twee tijdsintervallen is hij het snelst?

Antwoord

Op het interval [0,10] geldt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3{,}5-0}{10-0} = 0{,}35$.
De gemiddelde snelheid is 0,35 km/min.

Op het interval [10,15] geldt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5{,}5-3{,}5}{15-10} = 0{,}40$.
De gemiddelde snelheid is 0,40 km/min.

Hoewel hij op het tweede tijdsinterval een kleinere afstand aflegt, is zijn gemiddelde snelheid daar hoger. Met behulp van differentiequotiënten kun je de prestaties eerlijk vergelijken.

Opgave 5

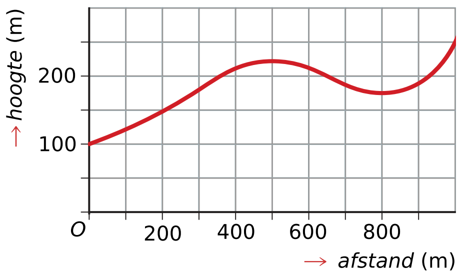
Bekijk **Voorbeeld 2**.

a In welk van de tijdsintervallen bewoog de skater het snelst?

b De skater finisht zijn 10 km tocht na 25 minuten en 20 seconden.
Hoe hard bewoog hij zich gemiddeld voort?

Opgave 6

Bij het begin van een weg naar een top van 250 m hoogte staat een waarschuwingsbord met daarop een helling van 15%. Deze grafiek geeft het hoogteverloop van die weg weer. Horizontaal is de afstand uitgezet die je hemelsbreed hebt afgelegd en verticaal de hoogte waarop je je bevindt.



Figuur 6

a Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering bij zo'n hellingspercentage?

b Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering gerekend over de gehele weg?

c Klopt het waarschuwingsbord?

d Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering op het interval [400,500] ongeveer?

e Schat de steilste helling van deze weg.

Voorbeeld 3

Gegeven is de kwadratische standaardfunctie $f(x) = x^2$. Druk het differentiequotiënt van f op het interval $[a,b]$ uit in a en b. Herleid zo ver mogelijk.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f op het interval $[a,b]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{(b+a)(b-a)}{b-a} = a+b$, mits $a \neq b$.

Dus het differentiequotiënt van f op het interval $[a,b]$ is $a+b$.

Opgave 7

a Waarom is de gemiddelde helling van de grafiek van een constante functie gelijk aan 0?

b Waarom is het differentiequotiënt van de lineaire functie $f(x) = ax+b$ op elk interval gelijk aan a?

c Gegeven is de kwadratische functie $h(x) = x^2 + x$. Druk het differentiequotiënt op het interval $[a,b]$ uit in a en b. Herleid zo ver mogelijk.

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = -2x^2$. Toon aan dat het differentiequotiënt van f op elk interval $[a,a+1]$ gelijk is aan $-4a-2$.

Verwerken

Opgave 9

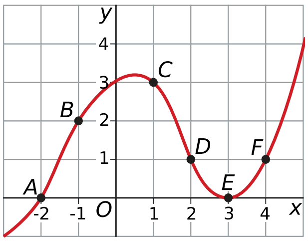
Je ziet een aantal punten op een grafiek.

a Bereken de helling van de lijn AB.

b Bereken de gemiddelde verandering van de y-waarden tussen C en F.

c Er zijn in de grafiek twee intervallen tussen getekende punten met een differentiequotiënt van 0. Welke intervallen zijn dat?

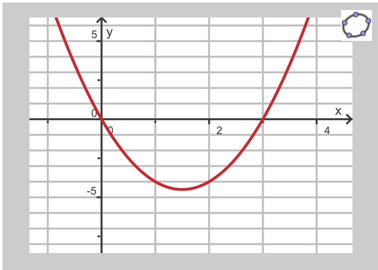
d Punt F heeft een lagere y-waarde dan punt C. Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval [1,4] zien?



Figuur 7

Opgave 10

Gegeven is deze grafiek gemaakt in GeoGebra.
Bereken het differentiequotiënt op het interval [1,3].



Figuur 8

Opgave 11

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ op het domein [-2,4].

a Bereken het differentiequotiënt op het interval [0,2].

b Bereken het differentiequotiënt op het interval [-1,2].

c Wat valt je op bij b? Licht je antwoord toe.

d Het differentiequotiënt op het interval [1,3] is 1. Waarom kun je nu niet zonder meer zeggen dat de grafiek op dat interval stijgend is? Welke conclusie kun je wel trekken?

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Druk het differentiequotiënt van f op het interval $[a, a+1]$ uit in a.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = 2 - 3\sqrt{2x+5}$.

a Bereken het differentiequotiënt van f op het interval [-2,5; 2] exact.

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval [-2,12] op drie decimalen nauwkeurig.

c Voor welke a geldt dat het differentiequotiënt op het interval $[0,a]$ gelijk is aan -1? Rond af op twee decimalen.

Toepassen

Opgave 14: Afkoelende koffie

Het afkoelen van een kopje koffie hangt af van de temperatuur van de koffie bij het inschenken en van de kamertemperatuur. Ook de vorm en het materiaal waarvan het kopje is gemaakt heeft invloed. Bij een bepaalde situatie geeft de formule $T(t) = 20 + 70 \cdot 0{,}82^t$ de temperatuur van een kopje koffie. Hierin is T de temperatuur in graden en t de tijd in minuten.

a Wat is de temperatuur van de koffie bij het inschenken?

b Hoeveel graden daalt de temperatuur van de koffie gemiddeld in de eerste vijf minuten?

c Bereken ook in één decimaal nauwkeurig hoeveel de temperatuur gemiddeld daalt in de volgende vijf minuten.

d De temperatuur van de koffie daalt van $t = 0$ tot $t = 5$ sneller dan van $t = 5$ tot $t = 10$. Leg uit hoe je dit aan de differentiequotiënten bij de deelvragen b en c kunt zien. Geef er ook een natuurkundige verklaring voor.

Opgave 15: Bolvormige vaas

Een vaas heeft de vorm van een aan twee kanten afgeknotte bol (zonder bloemen, maar wel met een laagje water van 3 cm). De vaas wordt buiten in de regen gezet. Door de regen stroomt de vaas langzaam vol.

$V(h)$ is het volume (in cm^3) van de vloeistof in de vaas als de hoogte van de vloeistofspiegel h cm is.

Er geldt: $V(h) = 33\pi h + 4\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval [3,5]. Rond af op hele getallen.

b Wat betekent dit differentiequotiënt?

De regen valt met steeds wisselende kracht. Na 24 uur buiten in de regen staat de vloeistofspiegel van de vaas precies op 5 cm hoogte.

c Bereken $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ voor deze 24 uur, rond af op hele getallen. Wat betekent dit differentiequotiënt?

Testen

Opgave 16

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die tijden vind je in de tabel:

tijd t (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand a (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 3

a Bereken het differentiequotiënt op het tijdsinterval [0,10].

b Welke betekenis heeft dit getal voor de wielrenner?

c Je kunt bij deze tabel een grafiek maken door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd t in minuten, op de verticale as de afgelegde afstand a in kilometer. Bereken het hellingsgetal van het lijnstuk dat hoort bij het interval [44,60].

d Bereken voor het tijdsinterval [18,44] de waarde $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ in twee decimalen nauwkeurig.

e Welke betekenis hebben de bij c en d gevonden getallen voor de grafiek? Geef alle goede antwoorden.

A. Ze geven de helling weer van het lijnstuk bij het begin- en het eindpunt bij het tijdsinterval.
B. Ze geven de totale toename van de afstand weer op het tijdsinterval.
C. Ze geven de gemiddelde toename van de afstand per minuut weer op het tijdsinterval.

Opgave 17

Gegeven de functie $f(x) = 0{,}5x^4$. Bereken het differentiequotiënt op het interval [0,2].

Opgave 18

Gegeven de functie $f(x) = 0{,}5x^2$. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[p,2p]$ (met $p \neq 0$).

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.