1.1 In grafieken

Inleiding

In de Delta Nederland verandert de waterstand voortdurend. De veranderingen worden beschreven met eb, laagwater, vloed en hoogwater. Tussen hoogwater en laagwater daalt het water. Maar stijging en daling zijn niet constant: vlak voor hoogwater neemt de stijging langzaam af en na hoogwater neemt de daling een paar uur lang toe.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen stijgend en dalend en constant gebruiken bij grafieken;
- toenemende, afnemende en constante stijging en daling herkennen;
- (lokale) maxima en minima van een grafiek bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Zoek via **deze website van Rijkswaterstaat** een grafiek van de waterstand bijvoorbeeld bij Vlissingen. Klik op de huidige waterstand en kies ‘Meer info’.

a Herken je stijging en daling in de grafiek? Kun je soorten stijging en daling beschrijven?

b Wanneer stijgt het water het snelst?

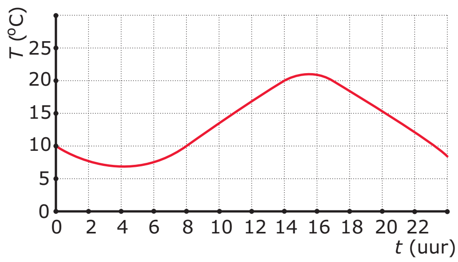
c Hoe zit het met de stijging van het water bij ‘hoog water’?

Uitleg

Deze grafiek geeft de temperatuur T (in °C) op een bepaalde plaats weer afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op de dag.

De temperatuur stijgt vanaf $t = 4$ tot aan $t = 15{,}5$, want als t toeneemt vanaf 4 tot 15,5, wordt ook T groter. Je zegt dan dat de grafiek stijgend is op het interval $\langle 4; 15{,}5 \rangle$.

De temperatuur daalt vanaf $t = 15{,}5$ tot aan $t = 24$, want als t toeneemt vanaf 15,5 tot 24, wordt T juist kleiner. Je zegt dan dat de grafiek dalend is op het interval $\langle 15{,}5; 24 \rangle$.



Figuur 2

De temperatuur is nergens constant, hoewel hij tussen 14 uur en 17 uur maar weinig verandert.

Als je de stijging op het interval $\langle 4; 15{,}5 \rangle$ nauwkeuriger bekijkt zie je dat hij op het interval $\langle 4,8 \rangle$ steeds groter wordt; de grafiek wordt steiler. Er is op dat interval sprake van toenemende stijging. Op het interval $\langle 8,14 \rangle$ daarentegen is er een constante stijging; de grafiek blijft daar voortdurend even steil. Op het interval $\langle 14; 15{,}5 \rangle$ wordt de stijging steeds minder, het gaat nu om afnemende stijging. Ga zelf na dat de grafiek op het interval $\langle 0,4 \rangle$ een afnemende daling vertoont. En op het interval $\langle 17,23 \rangle$ is er een vrijwel constante daling.

De hoogste dagtemperatuur is 21 °C. Dit is het maximum van T en het wordt bereikt op $t = 15{,}5$. De laagste dagtemperatuur is 7 °C. Dit is het minimum van T en het wordt bereikt op $t = 4$.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de dagtemperatuur in de **Uitleg**.

a Als de grafiek stijgt, neemt T dan toe of juist af?

b Als de grafiek toenemend stijgt, wat gebeurt er dan met T?

c Wat betekent voor de grafiek het verschil tussen een toenemende daling en een afnemende daling? En wat betekent dit voor de temperatuur T?

Theorie en voorbeelden

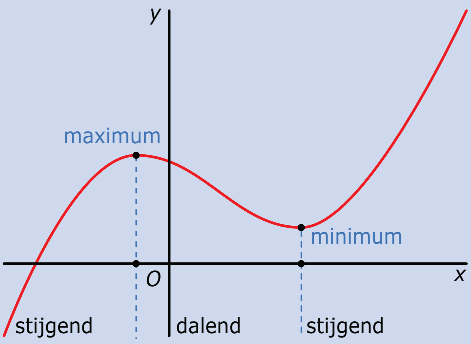
Om te onthouden

Een functie is:

- **stijgend** als de y-waarden groter worden bij groter wordende x;
- **dalend** als de y-waarden kleiner worden bij groter wordende x.

Verder heeft de functie:

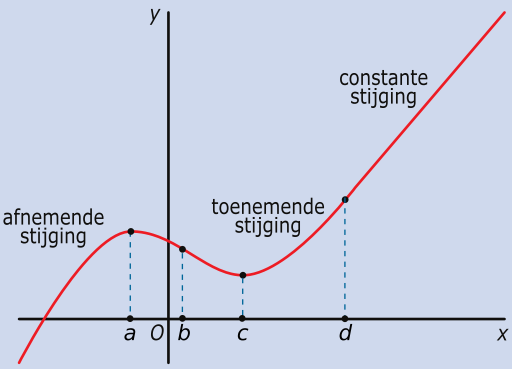
- een **maximum** als hij overgaat van stijgend in dalend in een aaneengesloten grafiek;
- een **minimum** als hij overgaat van dalend in stijgend in een aaneengesloten grafiek.



Figuur 3

Deze waarden noem je de **extremen**, ook wel de **uiterste waarden** van de functie.

Om aan te geven voor welke waarden van x van een bepaalde soort stijging of daling sprake is, gebruik je **intervallen**.



Figuur 4

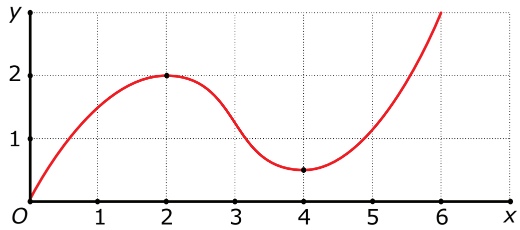
Deze grafiek heeft een:

- **afnemende stijging** op het interval $\langle \leftarrow, a \rangle$, omdat de stijging daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende daling** op het interval $\langle a, b \rangle$, omdat de daling daar steeds sterker wordt;
- **afnemende daling** op het interval $\langle b, c \rangle$, omdat de daling daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende stijging** op het interval $\langle c, d \rangle$, omdat de stijging daar steeds sterker wordt;
- **constante stijging** op het interval $\langle d, \rightarrow \rangle$, omdat de stijging daar steeds even sterk blijft, de grafiek is daar een rechte lijn.

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van functie $y = f(x)$ op het interval [0,6].

Beschrijf de veranderingen in deze grafiek.



Figuur 5

Antwoord

De veranderingen in deze grafiek kun je van links naar rechts als volgt beschrijven:

- de grafiek is afnemend stijgend op het interval ⟨0,2⟩.
- de grafiek is toenemend dalend op het interval ⟨2,3⟩.
- de grafiek is afnemend dalend op het interval ⟨3,4⟩.
- de grafiek is toenemend stijgend op het interval ⟨4,6⟩.

Verder heeft de functie:

- een maximum(waarde) van 2 voor $x = 2$: max. $f(2) = 2$;
- een minimum(waarde) van 0,6 voor $x = 4$: min. $f(4) = 0{,}6$.

Dit zijn de extremen (uiterste waarden) van de functie.

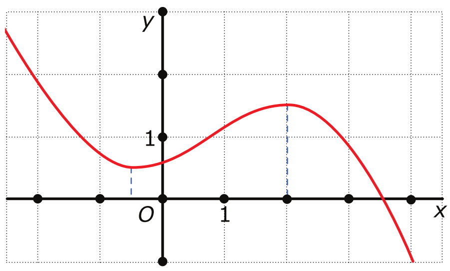
Opmerking: Dat er een minimum is bij $x = 4$, wil niet zeggen dat y niet lager kan zijn. Je ziet dat bijvoorbeeld bij $x = 0$ de y-waarde lager is. Het minimum is een lokaal (plaatselijk) minimum, net als het maximum.

Opgave 2

Bekijk de grafiek van f.

a Beschrijf met intervallen de verandering van de grafiek.

b Schrijf het maximum en het minimum van de functie op.



Figuur 6

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = -5 + 36x - 6x^2$. Beschrijf het verloop van de grafiek.

Antwoord

Breng eerst de grafiek in beeld, bijvoorbeeld met de grafische rekenmachine.

Figuur 7

De grafiek heeft een maximum van 49 bij $x = 3$. De grafiek gaat dus over van stijgend naar dalend. Aan de grafiek zie je met wat voor soort stijging en daling je te maken hebt.

De grafiek is afnemend stijgend op het interval ⟨← ,3⟩ en toenemend dalend op het interval ⟨3, →⟩.

Opgave 3

Gegeven is de kwadratische functie f met voorschrift $f(x) = -x^2 + 6x$. De grafiek van zo'n functie is een parabool.

a Met de grafische rekenmachine kun je de parabool bekijken. Op welk interval is de grafiek stijgend?

b Om welk soort stijging gaat het bij a?

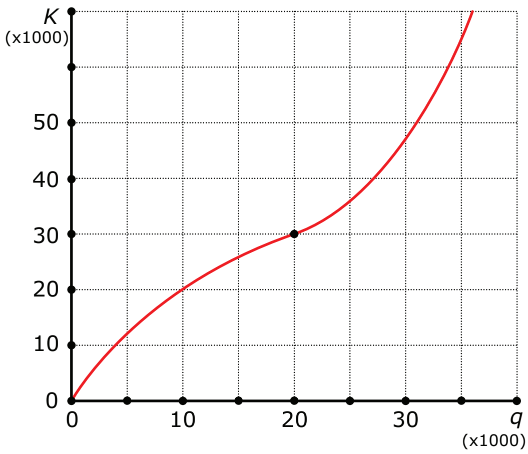
c Is er in de grafiek sprake van toenemende of afnemende daling?

d Elke parabool heeft een top. Daarbij hoort een minimum of een maximum. Welke extreme waarde heeft deze functie?

Voorbeeld 3

Bij de productie van een bepaald artikel stijgen de kosten K met een toename van het geproduceerde aantal producten q. Die kostenstijging neemt echter af omdat de productielijn steeds efficiënter wordt ingezet. Wanneer er 20000 artikelen worden gemaakt, zijn de kosten € 30000,00. Om nog meer producten te kunnen maken, moet de productielijn worden aangepast en de kosten stijgen dan harder. Je ziet een schets van een bijpassende grafiek.

Op de horizontale as komt het aantal producten q, op de verticale as de kosten K, omdat de kosten afhangen van het aantal geproduceerde artikelen. De grafiek begint in (0,0) met sterke stijging die vrij snel afvlakt. Dat gaat zo door tot het punt met $q = 20000$ en $K = 30000$. Daarna stijgt de grafiek steeds sterker.



Figuur 8

Opgave 4

Van een functie is gegeven dat:

- de grafiek constant stijgt tot $x = 2$;
- de grafiek constant is van $x = 2$ tot $x = 3$;
- de grafiek toenemend daalt van $x = 3$ tot $x = 4$ en dan afnemend daalt tot $x = 5$;
- de grafiek toenemend stijgt vanaf $x = 5$.

Maak een schets van de grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van x de functie een extreme waarde moet hebben.

Opgave 5

Je gebruikt nu steeds een grafiek om de veranderingen en de extremen van een functie te bepalen. Waarom kun je op deze manier nooit zeker zijn of je wel alle veranderingen en extremen hebt gevonden?

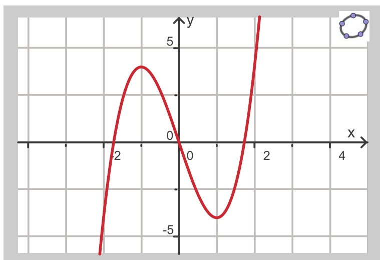
Verwerken

Opgave 6

Bekijk deze grafiek gemaakt met GeoGebra.

Geef voor deze functie aan:

- op welke intervallen de grafiek daalt dan wel stijgt en om welk soort stijging of daling het daarbij gaat;
- welke extremen er zijn;
- voor welke waarden van x de daling het sterkst is.



Figuur 9

Opgave 7

Gegeven is een functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x$. Bekijk de grafiek van deze functie met de grafische rekenmachine.

a Beschrijf met intervallen het verloop van de grafiek van f.

b Wat zijn de extremen van f?

c Waarom kun je niet aangeven waar de snelheid van stijgen het grootst is?

Opgave 8

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$.

a Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken. Welke extremen heeft deze functie?

b Op hoeveel intervallen is bij de grafiek van f sprake van toenemende daling?

c Geef het bereik van f.

Opgave 9

Sofie rijdt met de auto naar de supermarkt. De eerste 7 seconden trekt ze eerst rustig maar daarna snel op, daarna rijdt ze 15 seconden met een constante snelheid om vervolgens 10 seconden lang geleidelijk af te remmen, totdat ze stil staat voor een stoplicht. Ze staat daar 30 seconden stil. Als het stoplicht op groen springt, trekt Sofie geleidelijk op en na 8 seconden rijdt ze weer met een constante snelheid, totdat ze na 2 minuten bij de supermarkt is aangekomen en in 12 seconden geleidelijk afremt totdat ze stil staat.
Beschrijf met intervallen de soorten stijging en daling van de snelheid die optreden gedurende de route die Sofie naar de supermarkt aflegt.

Opgave 10

Voor de temperatuur T in °C op een bepaalde dag geldt:

- om 6:00 uur ’s morgens ($t = 6$) is de temperatuur $T = 2$ °C;
- de grafiek toenemend stijgt van $t = 6$ tot $t = 12$;
- de grafiek afnemend stijgt van 12:00 uur tot 14:30 uur en dan toenemend daalt tot $t = 20$;
- de grafiek afnemend daalt van $t = 20$ tot aan het eind van de dag.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van t de functie T een uiterste waarde moet hebben.

Toepassen

Opgave 11: Winstformule

Voor een klus maakt een bedrijf gebruik van de volgende winstformule $W = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2$, waarbij W de winst in honderden euro is en x het aantal werknemers dat het bedrijf voor de klus gebruikt.

a Bij welk aantal werknemers is er maximale winst?

Voor het bepalen van hoeveel werknemers het bedrijf moet inzetten, wordt er gekeken naar de extra winst per werknemer. Zo is de extra winst van de zesde werknemer $W(6) - W(5)$. De extra winst per werknemer wordt ook wel de marginale winst genoemd. Het bedrijf zorgt er voor dat er zoveel werknemers gebruikt worden dat de marginale winst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

b Hoeveel werknemers moet men dan voor de klus inzetten?

c Het antwoord van b wijkt af van dat van a. Toch kan het voor het bedrijf beter zijn, om naar de extra winst te kijken zoals bij b is gedaan. Waarom?

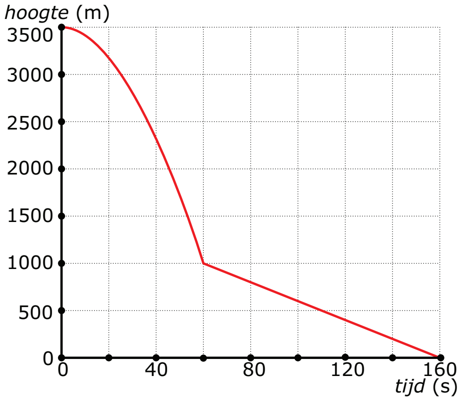
Opgave 12: Parachutist

Je ziet de grafiek die hoort bij een parachutesprong vanaf 3500 meter hoogte. Eerst maakt de parachutist een vrije val en daarna opent hij zijn parachute.

a Na hoeveel seconden heeft deze parachutist zijn valscherm geopend? Hoe zie je dat aan de grafiek?

b In de periode van vrije val is de grafiek toenemend dalend. Wat betekent dit voor de valsnelheid?

c Als de parachute uit is, is de valsnelheid constant. Hoe zie je dat aan de grafiek? Hoe groot is de valsnelheid als de parachute uitgevouwen is?



Figuur 10

Testen

Opgave 13

Bekijk de grafiek van de lengte van een man vanaf zijn veertiende levensjaar tot zijn huidige leeftijd.

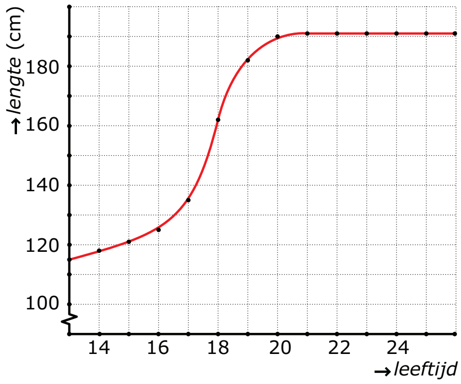
a Gedurende welk levensjaar groeit hij het snelst? Hoeveel centimeter groeit hij dat jaar?

b Gedurende welke periode is de grafiek stijgend?

c Gedurende welke periode is er sprake van een afnemende stijging?

d Gedurende welke periode is zijn lengte constant?

e Gedurende welke perioden is de groeisnelheid constant? Hoe zie je dat aan de grafiek?



Figuur 11

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = -0,5x^4 + 4x^2$ op het interval [-4,4].

a Op welke intervallen daalt de grafiek?

b Op hoeveel intervallen is de grafiek afnemend stijgend?

c Geef alle extremen van deze functie.