7.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Periodieke functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- eenheidscirkel — draaihoek — radialen;
- standaard sinus — periode — standaard cosinus;
- arcsinus — arccosinus;
- sinusoïde — periode — amplitude — evenwichtsstand — horizontale verschuiving;
- periodiek model.

Activiteitenlijst

- draaihoeken omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd
- de standaard sinusgrafiek tekenen — de standaard cosinusgrafiek tekenen — eenvoudige transformaties hierop toepassen;
- vergelijkingen bij de standaard(co)sinus oplossen, exact (met arcsin/arccos) en met de GR;
- bij een sinusoïde de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving bepalen, zowel vanuit de grafiek als vanuit de formule — toppen en nulpunten van sinusoïden berekenen — vergelijkingen bij sinusoïden oplossen;
- bij een gegeven periodiek verschijnsel een sinusoïde opstellen die dat verschijnsel zo goed mogelijk beschrijft.

Achtergronden

Bekijk de applet: sinus

In de Indische wiskunde heette de helft van de koorde van een cirkelboog de ardhâ-jyâ (ardha = half; jyâ = koorde) van die boog. Dit werd, afgekort tot jyâ of jîv en door de Arabieren als vgîb geschreven. Toen het wetenschappelijk centrum van de wereld verschoof, werden de Arabische werken in de 12e eeuw vertaald naar het Latijn. Bij de vertaling werd vgîb gelezen als het Arabische vgaib wat 'plooi' of 'boezem' betekent. Dit werd door Gerard van Cremona (1114—1187) letterlijk vertaald als **sinus**.

Sinus en cosinus werden al in de Griekse Oudheid bestudeerd en later o.a. door de Indische geleerden **Aryabhata (476—550)**, **Brahmagupta** en **Bhaskara** en de Perzische wetenschappers **Mohammad ibn Musa al-Khwarizmi**, **Omar Khayyam**, **Nasir al-Din al-Tusi (13e eeuw)**, **Ghiyath al-Kashi (14e/15e eeuw)**. In de 12de eeuw werden deze begrippen in West-Europa bekend.
In de oorspronkelijke definitie waren sinus en cosinus verhoudingen van bepaalde zijden in een rechthoekige driehoek. De grootte van deze verhouding verandert niet zo lang de hoeken even groot blijven.
Maar deze definitie brengt het probleem met zich mee dat stompe hoeken geen sinus of cosinus hebben (want er bestaan geen rechthoekige driehoeken met een stompe hoek). Om dit probleem op te lossen werden de sinus en cosinus opnieuw gedefinieerd met behulp van de eenheidscirkel. Voordeel van deze definitie is dat de sinus en de cosinus van elke hoek kunnen worden bepaald.

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie f door $f(x) = 200 - 50 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ met $0 \leq x \leq 30$.

a Bepaal het bereik van f en plot de grafiek van f op de grafische rekenmachine.

b Los algebraïsch op: $f(x) = 210$. Rond af op twee decimalen.

c Los exact op: $f(x) \leq 175$.

Opgave 2

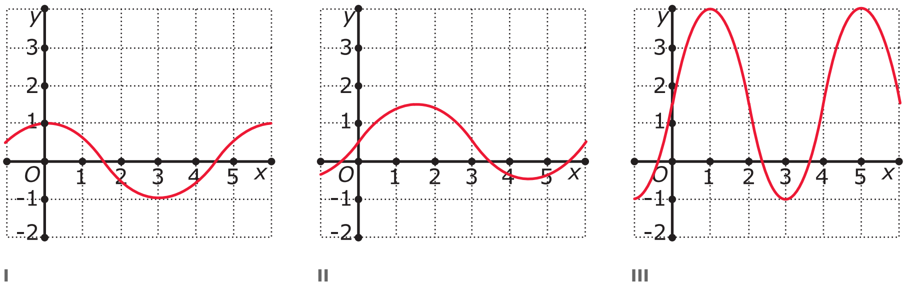
Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $1 - 2\sin(2\pi x) = 0$

b $25 + 10\cos\left(\frac{\pi}{7}(t - 15)\right) = 17$

Opgave 3

Bekijk de sinusoïden. Geef telkens een bijpassend functievoorschrift.



Figuur 1

Opgave 4

Bij het bepalen van de gewenste dijkhoogte langs de Nederlandse kust is het belangrijk dat de dijk hoger is dan de te verwachten maximale waterhoogte bij een stormvloed. De gemiddelde waterhoogte is daarbij niet van belang. Bij normale omstandigheden kan de getijdenbeweging van het zeewater bij de Hondsbosse zeewering te Petten redelijk worden beschreven door de functie:

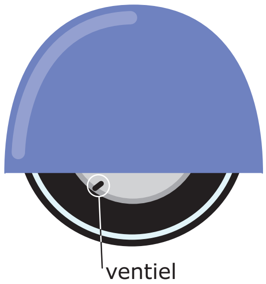
$y = 0{,}4 + 1{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right)$

Hierin is t in uur ten opzichte van middernacht op 21 juni 1998 en de waterhoogte y in meter ten opzichte van NAP.
Onder invloed van de stand van de zon en de maan kan de amplitude van de getijdenbeweging variëren van 10% tot 140% van de amplitude van de gegeven functie. Afhankelijk van de windsterkte kan de gemiddelde waterhoogte bij aanlandige wind 1,5 tot 2,5 meter hoger zijn dan normaal.

Hoe hoog moet de zeedijk van Petten volgens jou minimaal zijn? Licht je antwoord toe aan de hand van het gegeven functievoorschrift.

Opgave 5

Van het autowiel in de figuur is slechts het onderste deel zichtbaar. Van de wielhoogte is $\frac{3}{4}$ deel afgeschermd achter het spatbord.



Figuur 2

a Hoeveel procent van de tijd is het ventiel zichtbaar als de auto met een constante snelheid rijdt?

'Zichtbaar' kun je aangeven met een 1, 'onzichtbaar' met een 0. Je kunt dan de grafiek van de zichtbaarheid van het ventiel uitzetten tegen de tijd.

b Is dit een periodieke functie? Zo ja, teken een periode op schaal.

Opgave 6

Van een windmolen bevindt zich de as van de wieken op 25 m hoogte. De wieken zijn 12 m lang. Eén omwenteling van de wieken duurt precies 3 seconden en gaat tegen de wijzers van de klok in.
Eén van de wieken heeft een gekleurde stip op zijn eindpunt. Op $t = 0$ zit deze stip precies op het hoogste punt boven de grond.

a Stel een formule op voor de hoogte h in m van deze stip boven de grond afhankelijk van de tijd t in seconden.

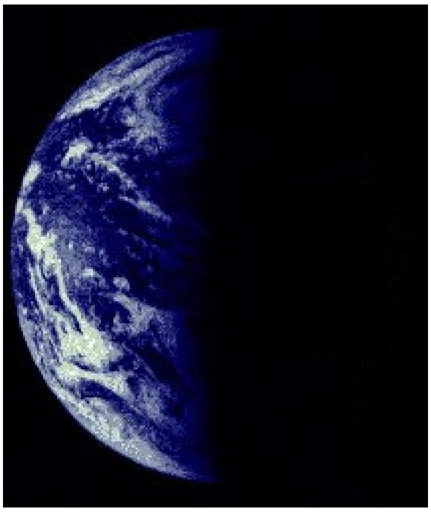
Voor de molen staat een rij eikebomen die ongeveer 30 m hoog zijn.

b Hoeveel tijd zie je elke omwenteling de stip? Geef je antwoord in tienden van seconden nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 7: Daglengte

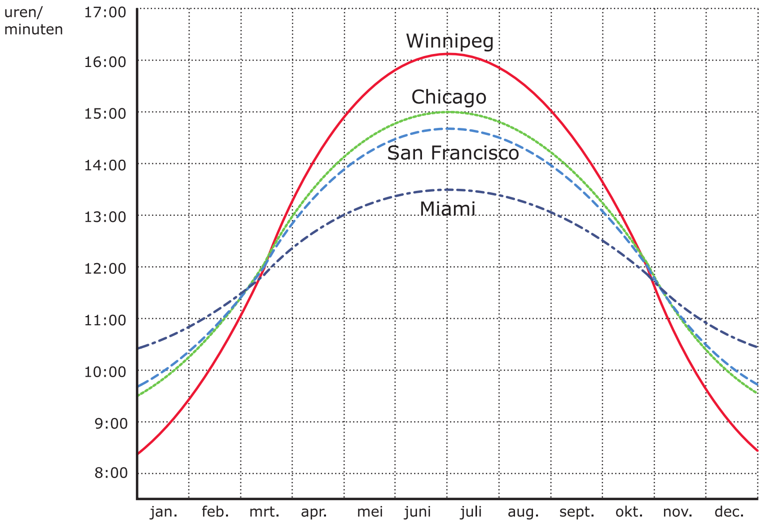
De daglengte varieert door het jaar heen. De daglengte is het verschil in tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang. Dit is een heel mooi periodiek verschijnsel dat behoorlijk nauwkeurig is te beschrijven met behulp van een sinusoïde.



Figuur 3

Via internet kun je een **actuele tabel voor zonsopkomst en -ondergang in De Bilt** vinden.
Een dergelijke tabel kun je in een rekenblad invoeren en dan grafieken maken voor de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang. **Hier zie je er een voorbeeld van**. Het zijn de vereenvoudigde gegevens van een bepaald jaar voor Amsterdam. De daglengte is het verschil van beide en ook daarvan is eenvoudig een grafiek te maken.
Je kunt de grafieken benaderen met sinusoïden en zo nauwkeurig de lengte van de langste dag en de kortste dag berekenen...

Het variëren van de daglengte hangt nogal af van de breedtegraad op Aarde. Dat komt omdat de Aardas niet precies loodrecht op de ecliptica (het vlak waarin de Aardbaan om de Zon ligt). Ook leuk om nader te onderzoeken...



Figuur 4

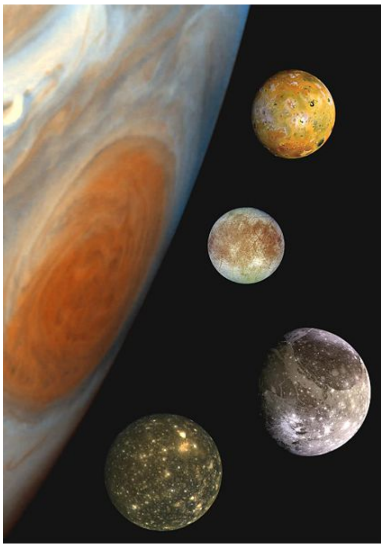
a Stel voor de vier steden een voorschrift op voor de daglengte als functie van de tijd t in dagen; $t = 0$ op 1 januari.

b Op welke datum is de langste dag van het jaar? En de kortste?

c Hoeveel dagen per jaar is de daglengte meer dan 14 uur?

Opgave 8: De manen van Jupiter

In 1610 werden de vier helderste **Jupitermanen** ontdekt door Galileï. De manen beschrijven bij benadering cirkelvormige banen om Jupiter, alle vier in dezelfde omlooprichting. Deze banen liggen (vrijwel) in één vlak met Jupiter en de Aarde. Daarom zie je Jupiter en de vier manen in een kijker altijd op één horizontale lijn liggen. De onderlinge posities van de manen in het kijkerbeeld veranderen voortdurend. Voor amateurastronomen worden maandelijks grafieken gepubliceerd waaruit ze op ieder moment de posities van de manen kunnen aflezen. Zie **hemel.waarnemen.com: Galileïsche manen van Jupiter, slingerdiagram september 2008** Het diagram op de website geeft informatie over de maand september in 2008.
Deze slingerdiagrammen zijn vrijwel zuivere sinusoïden.

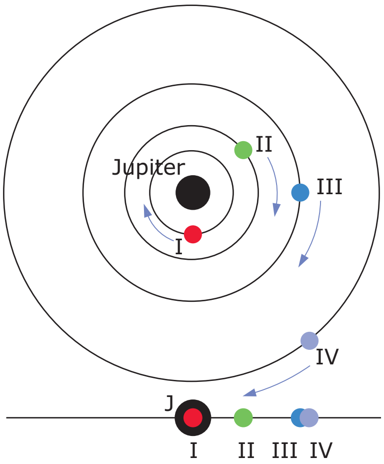


Figuur 5

Voor Ganymedes bijvoorbeeld wordt deze harmonische beweging goed beschreven door $u(t) = 15\sin\left(\frac{2\pi}{29.5}(t-17)\right)$ waarin t de tijd in dagen is met $t = 1$ op 1 september 2008 om 0:00 uur en u de uitwijking t.o.v. Jupiter gemeten in Jupiterstralen.

Zo kun je ook van de beweging van de drie andere Galileïsche manen een formule opstellen.
En verder kun je op elk moment tekenen hoe je deze manen t.o.v. Jupiter vanaf Aarde ziet. Nog een leuke puzzel...

Op 1 september 2008 om 0:00 uur waren dus van links (west) naar rechts (oost) in de kijker te zien: Io (I, voor Jupiter), Europa (II), Ganymedes (III) en Callisto (IV). Hier zie je van de vier manen de posities op hun cirkelbanen op 1 januari 1990 om 0:00 uur getekend.



Figuur 6

a Teken in de figuur voor deze vier manen het deel van de baan dat ze doorlopen van 1 september 0:00 uur tot 5 september 0:00 uur.

In de kijker zie je de beweging van elk van die manen als een in de tijd veranderende uitwijking $u(t)$ t.o.v. Jupiter op een horizontale as. Die uitwijking kan goed worden beschreven met een sinuoïde. u wordt uitgedrukt in veelvouden van de straal van Jupiter en t is in dagen.
Voor Callisto geldt bij goede benadering $u(t) = 26 \sin(0{,}365(t - 24))$.
(Hierbij is er van uit gegaan dat ‘West’ een positieve waarde van u betekent en ‘Oost’ een negatieve.)

b Laat zien dat deze formule redelijk overeenkomt met de gegeven grafiek. Bereken met de formule de omlooptijd van Callisto.

c Stel zelf zo'n formule op voor Ganymedes.

De manen zijn in de figuur naar verhouding veel te groot getekend. In werkelijkheid zijn het stipjes. Dus als $-1 \leq u(t) \leq 1$ dan kunnen de manen achter Jupiter zitten.

d Bereken met behulp van de formule voor Ganymedes hoe lang deze maan achter Jupiter zit.

Opgave 9: Fietsen

Bij normaal weer, zonder al te veel mee- of tegenwind, legt een fietser gemiddeld 15 kilometer per uur af. Als je bij een constante snelheid de hoogte van de trappers uitzet tegen de tijd, of de hoogte van het ventiel tegen de tijd, krijg je een mooie sinusoïden.


Figuur 7

a Maak daarvan een overzicht met grafieken en formules. Geef redelijke schattingen van de bijbehorende afmetingen.

De baan die het ventiel aflegt als je fietst is geen sinusoïde.

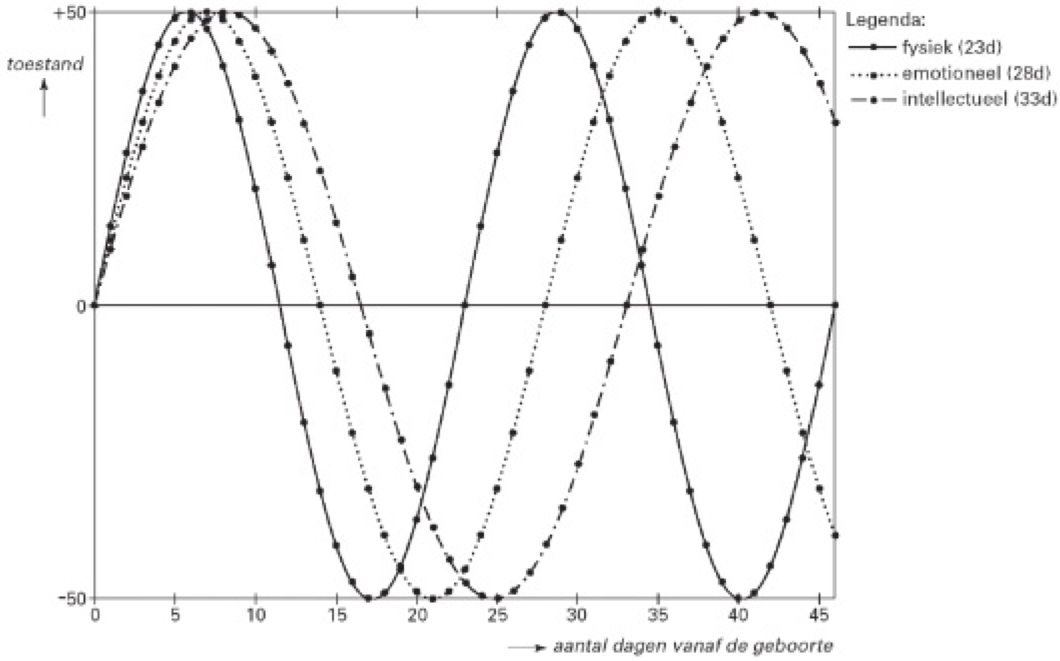
b Waarom is dat zo?

c Hoe ziet die baan er dan wel uit? Maak er een zo goed mogelijke tekening van en verwerk die in het overzicht.

Examen

Opgave 10: Bioritme

Op een pagina op Internet staat te lezen dat ons leven beheerst wordt door een drietal toestanden, namelijk door onze fysieke, onze emotionele en onze intellectuele toestand. Op de ene dag voel je je fysiek (lichamelijk) beter dan op een andere dag. Deze ‘fysieke toestand’ kunnen we weergeven op een schaal van - 50 (fysiek op dieptepunt) tot +50 (fysiek opperbest). Deze fysieke toestand varieert in de tijd volgens een sinusoïde.
Ook de ‘emotionele toestand’ en de ‘intellectuele toestand’ variëren op een schaal van - 50 tot +50 volgens een sinusoïde. Zie figuur.



Figuur 8

Bij de geboorte van een mens zou elke cyclus zich in dezelfde begintoestand bevinden, zoals is weergegeven in de figuur. Tezamen bepalen de drie cycli het zogenaamde bioritme van een mens. Sommigen beweren dat het bioritme volledig vastlegt tot welke prestaties een mens op een bepaald moment in staat is. Zo zou je bijvoorbeeld kunnen uitrekenen op welke dag je het best kunt solliciteren.
Voor de fysieke cyclus is de periode 23 dagen, voor de emotionele cyclus 28 dagen en voor de intellectuele cyclus is de periode 33 dagen.

Het bioritme in de figuur betreft een pasgeboren baby. E is de emotionele toestand van de baby t dagen na de geboorte. Hierbij hoort een formule van de vorm $E = a \sin(bt)$.

a Geef de waarden van a en b.

Zodra de emotionele toestand beneden - 25 komt, zou het moeilijker worden om de emoties onder controle te houden.

b Hoeveel procent van een periode heeft de emotionele toestand een waarde die kleiner is dan - 25? Licht je antwoord toe.

c F is de fysieke toestand van de baby. Onderzoek of F op de eerste verjaardag een dalend of een stijgend verloop heeft.

Annelies is op 1 januari 1983 geboren. Op 1 januari 2001 wordt ze dus 18 jaar. Vanaf die dag mag ze rijexamen doen. Ze wil dat doen op een dag waarop zowel haar fysieke als haar intellectuele toestand positief is. (De jaren 1984, 1988, 1992, 1996 en 2000 hebben een dag extra, dus 366 dagen.)

d Onderzoek welke de eerste drie dagen van januari 2001 zijn die voor het rijexamen in aanmerking komen.

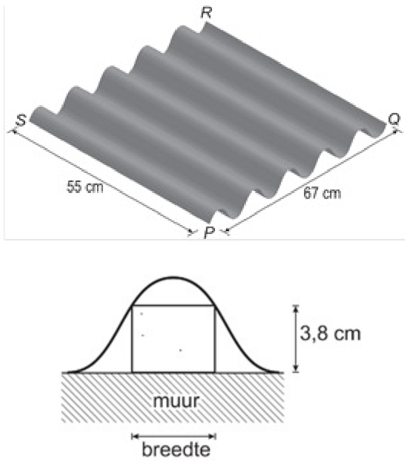
(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2000, eerste tijdvak, opgave 1)

Opgave 11: Golfplaat

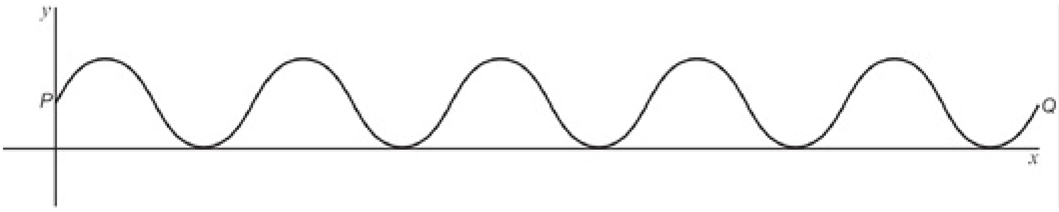
Golfplaat is een bouwmateriaal dat gebruikt wordt voor het afdekken van eenvoudige bouwwerken. In de figuur hiernaast is een rechthoekig stuk golfplaat getekend. Hieronder is het vooraanzicht van dit stuk golfplaat in een assenstelsel getekend. Hierbij is de dikte verwaarloosd. In het assenstelsel zijn x en y uitgedrukt in cm. Bij deze grafiek behoort de formule:

$y = 3 + 3\sin(0{,}469x)$

De golfplaat wordt als afdakje gebruikt. De plaat wordt horizontaal neergelegd en steunt aan de randen PQ en RS op een muur. De ruimtes tussen de bovenrand van de muur en de golfplaat worden afgedicht met houten blokjes. Deze blokjes zijn 3,8 cm hoog en hebben een zo groot mogelijke breedte. In figuur is dit geschetst.



Figuur 9



Figuur 10

a Bereken de breedte van zo'n blokje. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Het bovenaanzicht van het stuk golfplaat de figuur rechtsboven is een rechthoek $PQRS$. $PQ = 67$ cm en $PS = 55$ cm. Dit stuk golfplaat wordt diagonaal doorgezaagd. In het bovenaanzicht is de zaagsnede een rechte lijn van S naar Q. De werkelijke vorm van de doorsnede is een sinusoïde.

b Stel een formule op van deze sinusoïde als deze op ware grootte in een assenstelsel zoals in het vooraanzicht wordt weergegeven.

(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2005, tweede tijdvak)

Opgave 12: Cosinus

Gegeven zijn de functies $f_1(x) = 3\cos(x)$ en $f_2(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

a Onderzoek, met behulp van de grafische rekenmachine, voor welke waarden van x tussen 0 en 2π geldt $f_1(x) < f_2(x)$. Rond de getallen in het antwoord af op twee decimalen.

b Hieronder zijn enkele transformaties vermeld:

- horizontale verschuiving ... naar links of ... naar rechts
- verticale verschuiving ... omhoog of ... omlaag
- vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met de factor ...
- vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met de factor ...

Welke van deze transformaties kunnen achtereenvolgens worden uitgevoerd om uit de standaardgrafiek van $y = \cos(x)$ de grafiek van f_2 te krijgen? Geef daarbij ook de getallen die op de plaats van de puntjes horen te staan. Er zijn verschillende goede antwoorden mogelijk, geef niet meer dan één antwoord.

c Voor de somfunctie s geldt: $s(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
De somfunctie s kan geschreven worden in de vorm $s(x) = a\cos(x + b)$.
Leid, met behulp van de grafische rekenmachine, uit de grafiek van s de waarden van a en b af. Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B1 in 2001, eerste tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.