7.5 Periodieke modellen

Inleiding

Je hebt tot nu toe berekeningen gemaakt en grafieken getekend bij gegeven sinusoïden. Het omgekeerde kan ook: bij een gegeven grafiek van een sinusoïde de formule opstellen. Met die formule kun je snel nieuwe punten van de grafiek vinden.

Verder kun je periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, vaak goed benaderen met een sinusoïde. Die sinusoïde is dan een model voor het verschijnsel.

Je leert in dit onderwerp

- bij een getekende sinusoïde de formule opstellen;
- sinusoïden gebruiken als model voor een periodiek verschijnsel.

Voorkennis

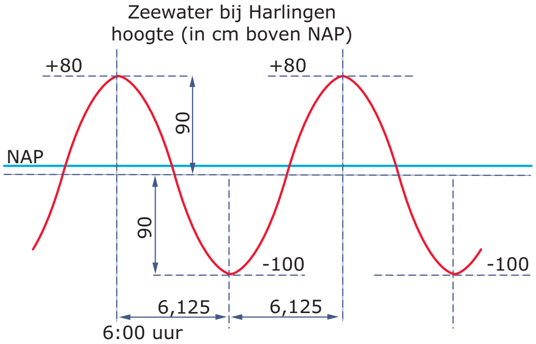
- de grafiek van een sinusoïde (zowel met sin als cos) tekenen;
- de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving van een sinusoïde aflezen uit de formule, dan wel uit de grafiek.

Verkennen

Opgave V1

In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van 12,25 uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.

De bijbehorende grafiek lijkt op een sinusoïde.



Figuur 1

a Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtslijn van die sinusoïde.

b Stel een passende formule op.

c Wat is het nut van zo'n formule?

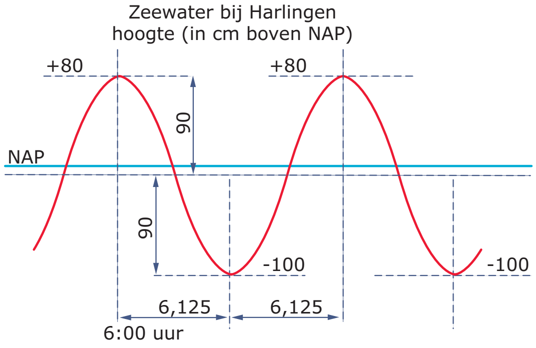
Uitleg

Bekijk de applet: waterstanden Harlingen

Periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, kun je vaak goed benaderen met een sinusoïde. Die sinusoïde is dan een model voor het verschijnsel.

In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van 12,25 uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.

Bekijk de schets van een grafiek die past bij de getijdeninformatie van Harlingen.



Figuur 2

De bijbehorende formule bij de grafiek heeft de vorm: $h(t) = a \cdot \sin(b(t + c)) + d$.

In de grafiek kun je de volgende gegevens aflezen.

- De periode is 12,25 uur: $b = \frac{2\pi}{12{,}25} \approx 0{,}52$
- De waterstand ligt tussen 0,8 m en -1,0 m. De amplitude is $a = 0{,}9$ m.
- De evenwichtsstand ligt 0,9 m onder hoogwater: $d = -0{,}1$.
- Hoogwater moet bij $t = 6$ zitten. Het direct ervoor liggende punt op de evenwichtsstand zit daar een kwart periode voor. Dit is bij $t = 6 - 3{,}0625 \approx 2{,}94$. Dit betekent dat $c \approx -2{,}94$.

De bijpassende sinusoïde wordt: $h(t) \approx 0{,}9\sin(0{,}52(t - 2{,}94)) - 0{,}1$.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de waterstand bij Harlingen in de **Uitleg**.

a Leg uit hoe uit de gegevens de periode, de amplitude en de evenwichtslijn worden gevonden.

b Stel een bijpassende formule op uitgaande van $y = \cos(x)$.

c Laat zien dat de formule die in de uitleg werd gevonden, $h(t) \approx 0{,}9\sin(0{,}52(t - 2{,}94)) - 0{,}1$, dezelfde grafiek oplevert. Controleer de grafieken op je grafische rekenmachine.

Opgave 2

Ga uit van de functie $y = \sin(x)$. Schrijf het voorschrift op van de periodieke functies die ontstaan bij de volgende wijzigingen:

a De amplitude wordt 4.

b De amplitude wordt 10 en de evenwichtsstand wordt 20.

c De periode wordt 4π en de amplitude wordt 4.

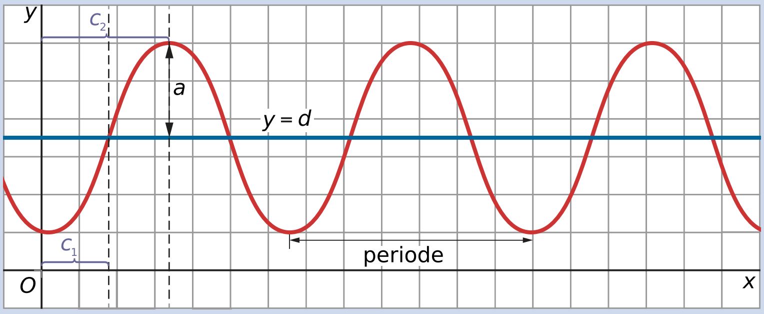
d De horizontale verschuiving is 2, de periode wordt 10, de amplitude wordt 5 en de evenwichtsstand wordt 10.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wanneer je een periodiek verschijnsel kunt beschrijven met een sinusoïde kun je daarbij een passend functievoorschrift maken door:

- de **evenwichtslijn** $y = d$ te bepalen.
- de **amplitude** a (maximale uitwijking van de evenwichtslijn) te bepalen.
- de **periode** p te bepalen.
- de **horizontale verschuiving** (ten opzichte van de standaardgrafiek) c te bepalen.



Figuur 3

Er zijn twee functievoorschriften mogelijk:

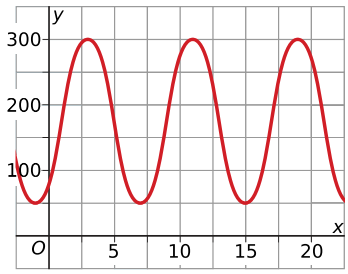
- $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c_1)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$
- $f(x) = a \cdot \cos(b(x - c_2)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$

Let erop dat de waarden voor a, b en d bij beide grafieken hetzelfde zijn, maar de waarden van c niet. De sinus ‘begint’ altijd op de evenwichtslijn, de cosinus op het hoogste punt. De verschuiving ten opzichte van de standaardsinus is daardoor anders dan ten opzichte van de standaardcosinus.

Voorbeeld 1

Bekijk de sinusoïde.

Welk functievoorschrift kun je bij deze sinusoïde maken uitgaande van de standaardsinus?
En welk functievoorschrift kun je maken uitgaande van de standaardcosinus?



Figuur 4

Antwoord

Maximum 300 en minimum 50 geeft:

- de amplitude is $a = \frac{300-50}{2} = 125$
- de evenwichtsstand is $y = 300 - 125 = 50 + 125 = 175$

Twee opvolgende maxima zitten bij $x = 3$ en $x = 11$.
De periode is $p = 8$. Ga uit van de standaardsinus, dan is de horizontale verschuiving de x-waarde van een punt op de grafiek op de evenwichtsstand op het moment dat de grafiek daar stijgt.
Hier is dat $x = 1$.
Het functievoorschrift wordt:

$$f(x) = 125 \sin\left(\frac{2\pi}{8}(x - 1)\right) + 175$$

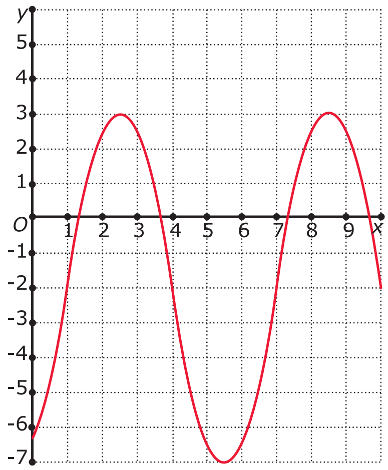
Ga je uit van de standaardcosinus, dan is de horizontale verschuiving de x-waarde van een punt op de grafiek waar een maximum zit. Hier is dat bijvoorbeeld $x = 3$.
Het functievoorschrift wordt:

$$f(x) = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{8}(x - 3)\right) + 175$$

Opgave 3

Je ziet hier een sinusoïde getekend.

Maak er twee functievoorschriften bij, uitgaande van $y = \sin(x)$.



Figuur 5

Opgave 4

Maak bij de sinusoïde van de vorige opgave twee functievoorschriften uitgaande van $y = \cos(x)$.

Voorbeeld 2

Een sinusoïde heeft een maximum van 1 en een minimum van -5.
Het domein is $\mathbb{R}$.

De evenwichtswaarde -2 wordt onder andere bereikt als $x = \frac{5}{3}\pi$ en daarna als $x = \frac{11}{3}\pi$.

Tussen deze beide x-waarden ligt de grafiek boven de evenwichtsstand.

Stel een formule op voor de beschreven sinusoïde, met zowel een sinus als een cosinus.

Antwoord

De formule krijgt bijvoorbeeld de vorm $y = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ of de vorm $y = a \cdot \cos(b(x - c)) + d$.

Maak een schets van de situatie.

De twee punten op de evenwichtsstand liggen een halve periode uit elkaar.

- De periode is $2 \cdot \left(\frac{11}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi\right) = 4\pi$, $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.
- De evenwichtsstand is $y = -2$.
- De amplitude a is $\frac{1-(-5)}{2} = 3$.

Het is bekend waar de punten op de evenwichtsstand zitten. Het is het makkelijkst om uit te gaan van de standaardsinus. De horizontale verschuiving is $\frac{5}{3}\pi$. Bij die x-waarde hoort een punt op de evenwichtsstand waarin de grafiek omhooggaat.

De gevraagde formule is bijvoorbeeld:

$y = 3\sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{3}\pi\right)\right) - 2$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt de formule van een sinusoïde opgesteld, waarbij uitgegaan wordt van de standaardsinus. Stel een andere formule op voor deze sinusoïde waarbij nu uitgegaan wordt van de standaardcosinus.

Opgave 6

De grafiek van een sinusoïde f heeft een minimum 10 voor $x = 1$ en een eerstvolgend maximum 26 voor $x = 13$.

a Bereken de periode, de evenwichtslijn en de amplitude.

b Geef twee passende formules, gebruik zowel de sinus als de cosinus.

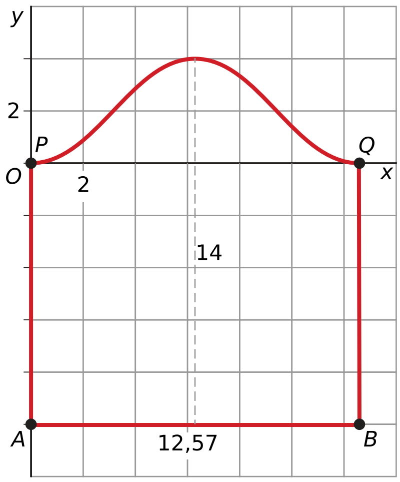
c Bereken in twee decimalen nauwkeurig: $f(12)$, $f(12{,}25)$, $f(12{,}5)$, $f(12{,}75)$ en $f(13)$.

d Los op: $f(x) > 22$.

Voorbeeld 3

Een cilinder met een diameter van 4 cm snijdt je aan de bovenkant schuin af. Vervolgens knip je hem open en leg je hem plat neer. Je kunt dan de afgebeelde figuur krijgen. De bovenrand is een zuivere sinusoïde.

Stel voor deze rand een formule op. Neem aan dat punt P de coördinaten $(0,0)$ heeft.



Figuur 6

Antwoord

De assen volgen uit de figuur.
Bepaal vervolgens:

- de evenwichtsstand is $y = 2$
- de amplitude is 2
- de periode is 4π

Het maximum zit halverwege de bovenrand bij $x = 2\pi$.
Ten opzichte van de cosinus is de horizontale verschuiving 2π.
De formule wordt: $y = 2\cos(0{,}5(x - 2\pi)) + 2$ met domein $[0{,}4\pi]$.

Opgave 7

Gebruik de cilinder uit **Voorbeeld 3**.

a Stel voor de bovenrand een formule op uitgaande van $y = \sin(x)$.

b Waarom is de periode 4π?

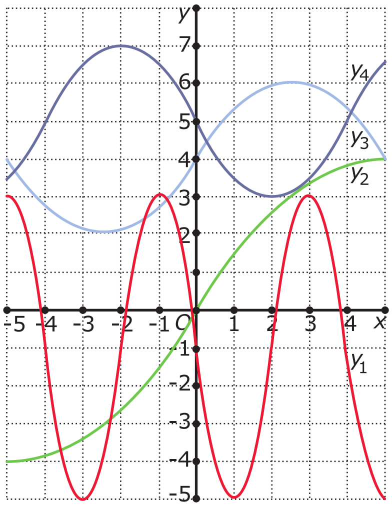
c De lijn $y = 3$ snijdt de sinusoïde uit het voorbeeld in de punten A en B.
Bereken exact de lengte van lijnstuk AB.

d Een lijn evenwijdig aan PQ snijdt de bovenrand in A en B. Gegeven is $AB = 4$ cm. Bepaal de coördinaten van A en B.

Verwerken

Opgave 8

Stel bij de vier sinusoïden een passend functievoorschrift op. Gebruik hierbij de sinus.



Figuur 7

Opgave 9

Bij de functie $y_1 = -1+4\sin\left(\frac{2\pi}{4}(x-2)\right)$ zijn andere functievoorschriften mogelijk die dezelfde grafiek hebben als y_1.

a Geef er minstens drie.

b Gebruik één van deze functievoorschriften om op te lossen: $y_1 = -2$. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

De grafiek van f is sinusvormig. De evenwichtslijn is $y = 1$, de amplitude is 2, de periode is π en de grafiek gaat stijgend door het punt $\left(\frac{1}{6}\pi, 1\right)$.

a Stel een formule op voor $f(x)$.

b Bereken met die formule $f(0)$.

c Los op: $f(x) \leq 0$.

Opgave 11

Functie $f(x)$ heeft een sinusvormige grafiek met een minimum in het punt $(15, -22)$ en een eerstvolgend maximum in het punt $(33, 104)$.

a Maak een schets van deze grafiek met $0 \leq x \leq 50$.

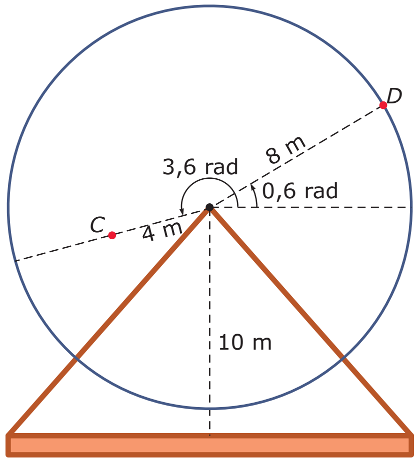
b Bereken de periode, de amplitude en de evenwichtslijn en stel een passend functievoorschrift op.

c Bereken $f(42)$, $f(45)$ en $f(48)$ algebraïsch.

d Los op: $f(x) = 72{,}5$.

Opgave 12

Een reuzenrad bevat de stoeltjes C en D. Stoeltje C draait op een afstand van 4 meter van de as in het rond, stoeltje D op een afstand van 8 meter. De as van het reuzenrad bevindt zich op 10 meter boven de grond. Bekijk de getekende situatie. Het reuzenrad draait in 8 seconden één keer rond. Op $t = 0$ staat stoeltje D zo hoog mogelijk. Het reuzenrad draait tegen de wijzers van de klok in.



Figuur 8

a Bereken bij de stand in de figuur de hoogte h in meter van de stoeltjes C en D ten opzichte van de grond.

b Stel een passend functievoorschrift op voor de hoogte van stoeltje D.

c Hoe hoog staat stoeltje C op tijdstip $t = 1413{,}25$?

d Hoelang zit je in stoeltje C elk rondje hoger dan 12 meter?

e Welke vergelijking moet je oplossen om te weten op welke tijdstippen stoeltje C en D op dezelfde hoogte hangen?

f Bereken in twee decimalen nauwkeurig hoeveel seconden per periode stoeltje C hoger hangt dan stoeltje D.

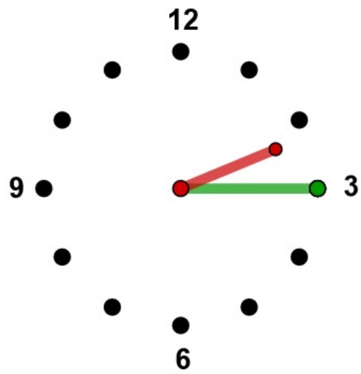
g Verklaar waarom het resultaat bij f ook te beredeneren valt.

Toepassen

Bekijk de applet: analoge klok

Je ziet hier een **analoge klok**. De lengte van de grote wijzer is 2 dm, die van de kleine wijzer 15 cm. Je kunt in de applet zelf de gewenste tijd instellen.

Bekijk de hoogte h van de uiteindes van de wijzers als functies van t (tijd).



Figuur 9

Opgave 13

Het middelpunt van de klok hangt op 2 meter hoogte.

a Stel een passend functievoorschrift op voor de hoogte h van de uiteindes van de wijzers als functies van t (tijd). Kies als eenheden hoogte in centimeter en tijd in uur en neem $t = 0$ op 0:00 uur.

b Geef bij de volgende tijden de hoogtes van de minutenwijzer en de urenwijzer, zo mogelijk exact, en anders in twee decimalen nauwkeurig.

- twee uur
- tien voor half vijf
- vijf voor elf
- twee voor twaalf

Testen

Opgave 14

Functie f met voorschrift $f(x)$ heeft een sinusvormige grafiek met een minimum in het punt $(20,300)$ en een eerstvolgend maximum in het punt $(32,400)$.

a Maak een schets van deze grafiek met x van 0 tot ten minste 40.

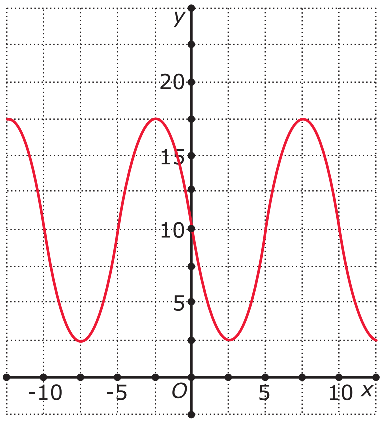
b Bereken de periode, de amplitude en de evenwichtslijn en stel een passend functievoorschrift op.

c Bereken $f(50)$, $f(51)$ en $f(52)$.

d Los op: $f(x) = 325$.

Opgave 15

Stel bij deze sinusoïde twee passende functievoorschriften op. Gebruik hierbij de sinus.



Figuur 10

Opgave 16

Onze ademhaling is bij benadering een periodiek verschijnsel. Een gezonde volwassen man ademt ongeveer 12 keer per minuut in en weer uit. De longinhoud $V(t)$ kan daarbij met zo'n halve liter toe- of afnemen, waarin t de tijd in seconden is. Het longvolume na inademen is 5,2 liter.

a Hoe groot is de ademhalingsfrequentie per minuut?

b Ga ervan uit dat $V(t)$ een sinusoïde is met op $t = 0$ een maximale longinhoud. Teken de grafiek van de longinhoud V uitgezet tegen de tijd t.

c Stel bij deze situatie een formule op voor $V(t)$.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.