7.4 Sinusoïden

Inleiding

Je hebt leren werken met de functies $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ (met x in radialen). Als je op deze functies transformaties toepast, krijg je andere periodes en kunnen de grafieken om een andere lijn dan de x-as gaan slingeren met een andere uitwijking. Dat is belangrijk omdat de sinusfunctie en de cosinusfunctie dan kunnen worden gebruikt om periodieke verschijnselen meer in het algemeen te beschrijven. Functies die door transformatie ontstaan uit $y = \sin(x)$ noem je sinusoïden.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip sinusoïde en de bijbehorende karakteristieken kennen en de grafieken ervan tekenen.

Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- de vergelijkingen $\sin(x) = c$ en $\cos(x) = c$ oplossen als c een constante is.
- transformaties op functies toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot \sin(4x) + 3$.

a Maak met de grafische rekenmachine de grafiek van f op $[0,2\pi]$.

b Bepaal de periode van deze periodieke functie.

c Bereken alle toppen van de grafiek op $[0,2\pi]$.

Gegeven is de functie $g(x) = 4 \cdot \sin(0{,}5(x - \pi)) - 1$.

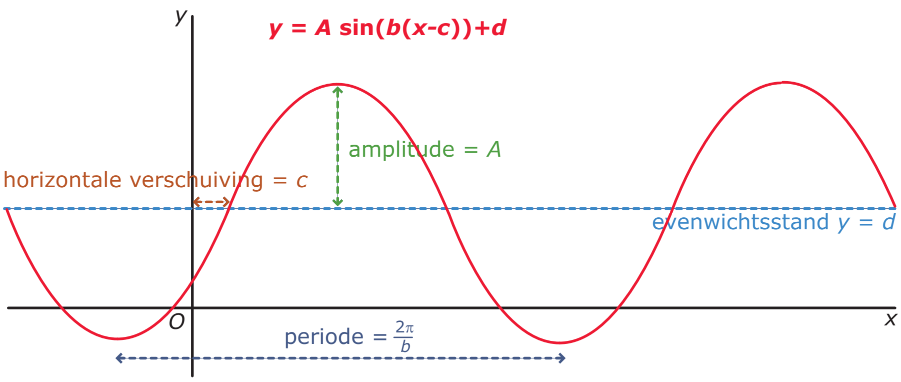
d Maak met de grafische rekenmachine de grafiek van g op $[0,4\pi]$.

e Bepaal de periode van deze periodieke functie.

f Bereken alle toppen van de grafiek op $[0,4\pi]$.

Uitleg

Bekijk de applet: sinusoïde



Figuur 1

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken. Zulke grafieken heten sinusoïden.

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \cos(b(x+c)) + d$ maken. Zulke grafieken heten ook sinusoïden.

Bekijk met de grafische rekenmachine wat er gebeurt als je a, b, c en/of d verandert.

- a verandert de maximale uitwijking, de amplitude is a.
- b verandert de periode, de periode is $\frac{2\pi}{b}$.
- c zorgt voor een horizontale verschuiving over $-c$, een translatie ten opzichte van de y-as.
  Bij een sinusfunctie is c de x-coördinaat van een punt waar de grafiek door de evenwichtsstand omhoog gaat.
  Bij een cosinusfunctie is c de x-coördinaat van een punt waar de grafiek een maximum heeft.
- d verandert de evenwichtsstand, die is $y = d$.

Wil je de grafiek van de sinusoïde $g(x) = 1{,}5 \cdot \sin(2(x-1)) + 0{,}5$ maken, dan gebruik je:

- de amplitude is 1,5
- de evenwichtslijn is $y = 0{,}5$
- de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- de horizontale translatie is 1

Het bereik van de functie is $B_g = [0{,}5 - 1{,}5; 0{,}5 + 1{,}5] = [-1{,}2]$.

De toppen van g vind je door de transformaties toe te passen op de toppen van f.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $g(x) = 1{,}5\sin(2(x-1)) + 0{,}5$ op $[0, 2\pi]$ in de **Uitleg**.

a Welke transformaties moet je achtereenvolgens op de grafiek van $y = \sin(x)$ toepassen om die van g te krijgen? Licht je antwoord toe.

b Het punt $(0,0)$ ligt op de grafiek van $y = \sin(x)$. Welk punt op de grafiek van g ontstaat door deze transformaties uit $(0,0)$?

c Welke toppen heeft de grafiek van g?

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 - 2\sin(3(x+2))$.

a Lees uit het functievoorschrift de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving af. Schets de grafiek.

b Plot de grafiek van f en controleer je antwoord met de applet.

c Oefen dit een aantal keer met zelf bedachte sinusoïden.

Theorie en voorbeelden

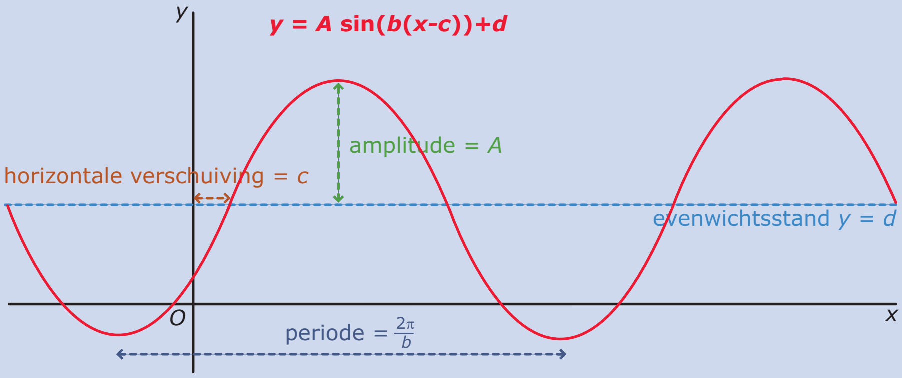
Om te onthouden

Bekijk de applet: sinusoïde

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x+c)) + d$ maken.

De grafieken van de op deze manier getransformeerde functies heten **sinusoïden**.

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \cos(b(x+c)) + d$ is ook een sinusoïde, want $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is een verschoven sinusgrafiek.



Figuur 2

Voor elke sinusoïde geldt:

- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtslijn) is a
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- de **horizontale verschuiving** is $-c$, dit is een translatie ten opzichte van de y-as
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $f(x) = 10\sin(3(x - \pi)) + 5$.
Bereken de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en leg uit hoe je de grafiek goed op je grafische rekenmachine in beeld krijgt. Bereken alle toppen van deze sinusoïde.

Antwoord

De periode is $p = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$, de amplitude is $A = 10$ en de evenwichtsstand is $y = 5$.

Hieruit volgt dat het maximum 15 en het minimum -5 is.

Verder wil je minstens één complete periode in beeld hebben en het liefst ook beide coördinaatassen.

Er begint een periode bij $(\pi, 5)$ en dus ook bij $\left(\frac{1}{3}\pi, 5\right)$.

Een geschikte vensterinstelling is $[0, \pi] \times [-5, 15]$.

Voor de maxima geldt $\sin(3(x - \pi)) = 1$ en dus:

$$\begin{aligned} 3(x - \pi) &= \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Voor de minima geldt $\sin(3(x - \pi)) = -1$ en dus:

$$\begin{aligned} 3(x - \pi) &= 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= 1{,}5\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

De toppen zijn $\left(1\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi, 15\right)$ (maxima) en $\left(1\frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi, -5\right)$ (minima).

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Leg uit waarom het maximum 15 en het minimum -5 moet zijn.

b Waarom ‘begint’ er een periode bij $(\pi, 5)$ en dus ook bij $\left(\frac{1}{3}\pi, 5\right)$?

c Leg uit, hoe je aan de x-waarden van de extremen komt.

Gegeven is $y = 12\sin(2x) - 6$.

d Bereken de periode en alle toppen van de grafiek van deze sinusoïde en plot de grafiek op het domein $[-2\pi, 2\pi]$.

Voorbeeld 2

De functie f met $f(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1$ is gedefinieerd op $\mathbb{R}$.

Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving om de grafiek goed in beeld te krijgen.

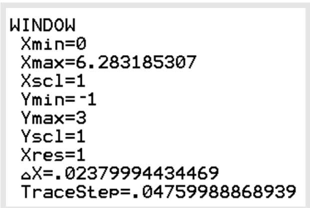
Los op: $f(x) \geq 1\frac{1}{2}$ in drie decimalen nauwkeurig.

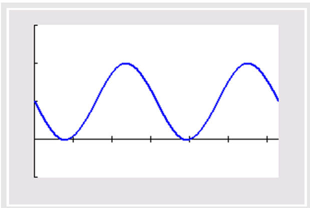
Antwoord

De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

De amplitude is 1 en de evenwichtsstand is $y = 1$, dus het maximum is $1 + 1 = 2$ en het minimum is $1 - 1 = 0$.

De horizontale verschuiving is $\frac{1}{2}\pi$. Kies venster bijvoorbeeld $[0, 2\pi] \times [-1, 3]$.





Figuur 3

Los op:

$$\begin{aligned}
\sin\left(2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right)\right) + 1 &= 1\tfrac{1}{2} \\
\sin\left(2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right)\right) &= \tfrac{1}{2} \\
2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) &= \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) + k \cdot 2\pi \vee 2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \pi - \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) + k \cdot 2\pi \\
2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) &= \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\
x &= \tfrac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \tfrac{11}{12}\pi + k \cdot \pi \\
x &\approx 1{,}833 + k \cdot \pi \vee x \approx 2{,}880 + k \cdot \pi
\end{aligned}$$

De benaderde oplossing vind je ook met de rekenmachine.

Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af: $1{,}833 < x < 2{,}880 + k \cdot \pi$.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 3\sin(\pi(x - 1)) + 10$.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving om de vensterinstellingen te bepalen waarmee je de grafiek goed in beeld krijgt.

b Bereken de coördinaten van alle toppen.

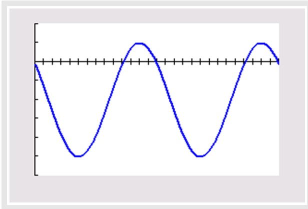
c Los op: $f(x) = 11{,}5$.

Voorbeeld 3

Plot de grafiek van functie $f(x) = 300\cos\left(\frac{\pi}{7}(x+2)\right) - 200$.

Neem x vanaf 0 tot 28.
Bereken de periode, rond af op een geheel getal. Bereken het bereik van f.
Los algebraïsch op: $f(x) = 0$. Rond af op twee decimalen.

Antwoord



Figuur 4

De x wordt vermenigvuldigd met $\frac{1}{7}\pi$.

De periode is daarom $\frac{2\pi}{\frac{1}{7}\pi} = 14$.

De hoogste waarde van f is $300 - 200 = 100$.
De laagste waarde van f is $-300 - 200 = -500$.
$B_f = [-500,100]$.

Los de vergelijking op.

$$\begin{aligned}
300\cos\left(\tfrac{\pi}{7}(x+2)\right) - 200 &= 0\\
300\cos\left(\tfrac{\pi}{7}(x+2)\right) &= 200\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{7}(x+2)\right) &= \tfrac{2}{3}\\
\tfrac{\pi}{7}(x+2) &= \pm\arccos\left(\tfrac{2}{3}\right) + k\cdot 2\pi\\
\tfrac{\pi}{7}(x+2) &\approx \pm 0{,}841 + k\cdot 2\pi\\
x+2 &\approx \pm 1{,}874 + k\cdot 14\\
x &\approx -0{,}126 + k\cdot 14 \vee x \approx -3{,}874 + k\cdot 14
\end{aligned}$$

Omdat x loopt vanaf 0 tot 28, krijg je vier oplossingen:
$x \approx 10{,}13 \vee x \approx 13{,}87 \vee x \approx 24{,}13 \vee x \approx 27{,}87$

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}(x+2)\right) + 8$.

a Bepaal de periode en de coördinaten van alle toppen.

b Welke transformaties moet je achtereenvolgens op de grafiek van $y = \cos(x)$ toepassen om die van f te krijgen?

c Los op (benaderingen in drie decimalen nauwkeurig): $f(x) \geq 11$.

Opgave 6

Voor de hoogte van de tip van het rotorblad van een draaiende windmolen geldt de formule:

$h(t) = 40 + 10\cdot\cos\left(\frac{4}{3}\pi\cdot t\right)$

Hierin is t de tijd in seconden en h de hoogte in meter.

a Bepaal de waarden voor de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving. Bij welke vensterinstellingen krijg je vanaf $t = 0$ precies twee periodes in beeld?

b Bereken de tijdstippen waarop de tip precies 45 meter boven de grond zit.

Verwerken

Opgave 7

De grafieken van de functies zijn sinusoïden. Geef van iedere sinusoïde de periode en de amplitude. Plot de grafiek zodat je twee periodes ziet.

a $y = 12 \cdot \sin(x)$

b $h(t) = 50 \sin(2\pi t) + 10$

c $y = 120 \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)$

d $P(x) = -20 \sin(2x)$

Opgave 8

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op drie decimalen.

a $5 \cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right) = 1$

b $10 \sin\left(\frac{\pi}{5}(x - 2)\right) = 5$

c $50 \cos(4x) = 25\sqrt{3}$

d $50 - 30 \sin\left(\frac{2\pi}{15}x\right) = 45$

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = 20 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 10$ op $[0,16]$.

a Bepaal het bereik van f.

b Bereken alle nulpunten van de grafiek van deze functie.

c Los op: $f(x) \leq 0$.

Opgave 10

Gegeven is $f(x) = 2 + 3 \sin(\pi x + \pi)$. De volgende functies hebben voor de juiste keuze van de parameter dezelfde grafiek als functie f. Bepaal telkens die parameter.

a $g(x) = 2 + 3 \cos(\pi x + a)$

b $h(x) = 2 - 3 \sin(\pi x + b)$

c $k(x) = 2 - 3 \cos(\pi x + c)$

Opgave 11

De hoogte boven de grond van iemand die zich in een reuzenrad bevindt, kun je beschrijven door:

$h(t) = 11 + 10 \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$

Hierin is $h(t)$ uitgedrukt in meter en t in seconden.

a Plot $h(t)$.

b De getallen 11 en 10 uit de formule hebben een betekenis voor het reuzenrad. Welke?

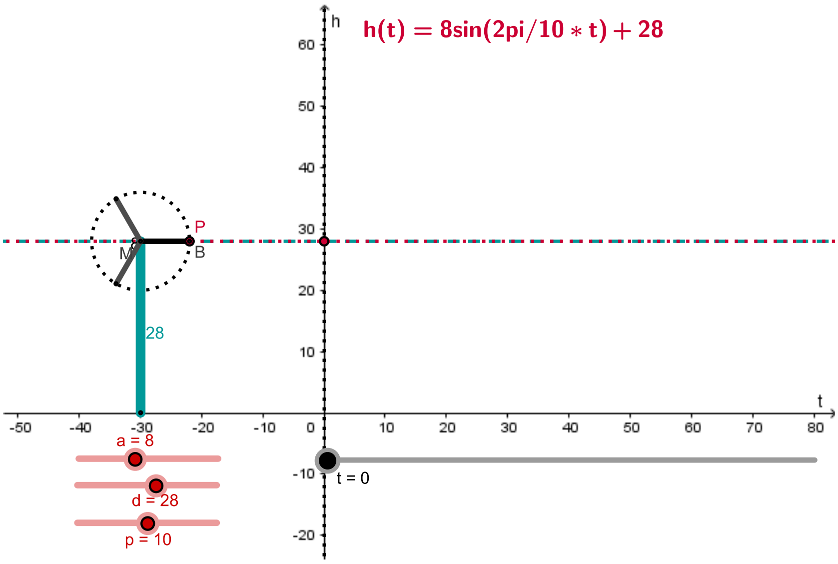
c Na één periode is het reuzenrad precies één keer rondgedraaid. Bepaal de periode in seconden.

d Bereken hoe lang het bakje van een reuzenrad hoger dan 18 meter boven de grond zit.

Toepassen

Hier zie je een schematische weergave van een **windmolen** waarvan je de lengte van de wieken a (in m), de hoogte van het draaipunt d (in m) en de omwentelingstijd, de periode p (in s) kunt aanpassen. De grafiek gaat over de hoogte van de uiterste punt P van de wiek, afhankelijk van de tijd t in seconden.

Bekijk de applet.



Figuur 5

Opgave 12

Bekijk de windmolen in **Toepassen**.

Van een zekere windmolen is de hoogte van het draaipunt 30 m, de lengte van de wieken 15 m en de omwentelingstijd (bij een zekere windsnelheid) 5 s.

a Stel een bijpassende formule op voordat je deze instellingen in de applet doet.
Controleer je antwoord met de applet.

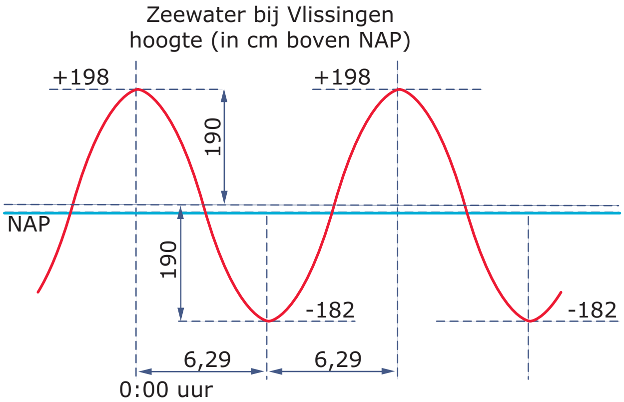
Deze windmolen staat achter een boerderij die een hoogte heeft van 20 m.

b Hoe lang is elke omwenteling de hoogte van de top van de wiek groter dan de hoogte van de boerderij?

c Je kunt de opdrachten bij a en b variëren door andere getallen te kiezen. Oefen met een medeleerling.

Opgave 13: Getijden

De grafiek in de volgende figuur geeft globaal de getijdenbeweging van het zeewater voor de haven van Vlissingen weer. Er wordt geen rekening gehouden met de invloed van de wind, met springtij, en dergelijke.



Figuur 6

a Hoe hoog is de gemiddelde waterstand volgens deze grafiek?

b Hoe groot is de maximale afwijking van de waterstand ten opzichte van het gemiddelde?

c Hoe groot is de periode van de getijdenbeweging?

Een benadering van de getijdenbeweging wordt gegeven door de volgende formule:

$$y = 8 + 190\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right)$$

met t in uren t.o.v. middernacht op 21 juni 2008 en y in cm ten opzichte van het NAP.

d Vergelijk de grafiek van deze functie met de grafiek in de figuur hierboven. Vind je dat de formule een goed beeld geeft van de getijdenbeweging?

e Hoe groot is volgens de formule de periode en de amplitude?

f Hoeveel uur per periode is de waterstand hoger dan 180 cm?

Testen

Opgave 14

Bepaal van de volgende functies de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$ of $y = \cos(x)$.

a $y = 4\sin(4\pi x)$

b $y = 6 + 2\cos(x + 8)$

c $y = 0{,}5\sin(0{,}5\pi x)$

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = -\sqrt{800}\sin(2\pi x) - 20$ op $[0,2]$.

a Bepaal het bereik van f.

b Bereken alle nulpunten van f op het gegeven interval.

c Los op: $f(x) \leq 0$.

Practicum

Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **bepalen van de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van een sinusoïde**. Je ziet hier alleen vergelijkingen met sinus, het gaat soms om exacte waarden. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.