7.3 Vergelijkingen met sinus en cosinus

Inleiding

Je hebt de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ gemaakt. Ook heb je er transformaties op toegepast. Nu ga je vergelijkingen met sinus of cosinus oplossen. Daarbij moet je goed rekening houden met de periodiciteit van deze grafieken.

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking die is te herleiden tot $\sin(x) = c$ oplossen als c een constante is;
- een vergelijking die is te herleiden tot $\cos(x) = c$ oplossen als c een constante is.

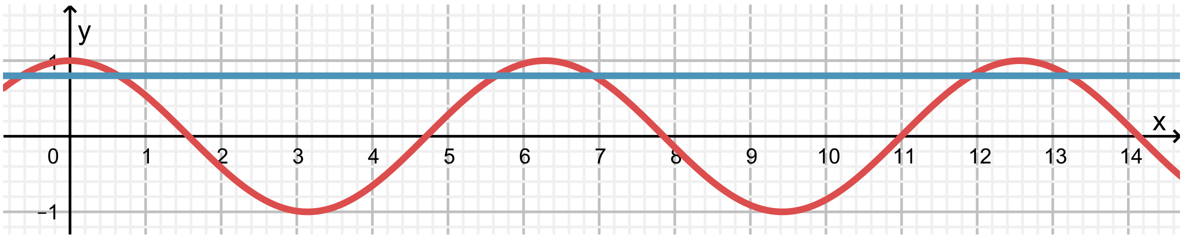
Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met transformaties van deze functies.

Verkennen

Opgave V1

Gebruik deze grafiek van $f(x) = \cos(x)$ en de symmetrie ervan. Hij is gemaakt in GeoGebra.



Figuur 1

a Los op: $\cos(x) = 0{,}8$ met x in $[0, 4\pi]$. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

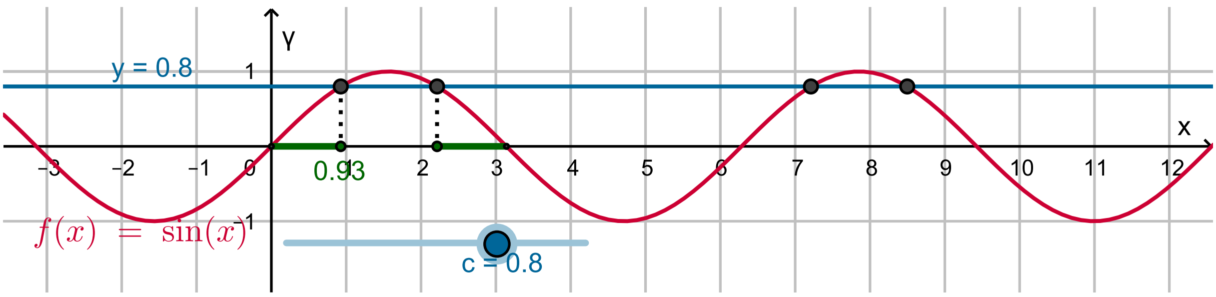
b Los op: $\cos(x) = 0{,}8$ voor elke mogelijke waarde van x. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

c Los op: $\cos(x) = 0{,}5$ met x in $[0, 4\pi]$. Geef je antwoord exact.

d Los op: $\cos(x) = 0{,}5$ voor elke mogelijke waarde van x. Geef je antwoord exact.

Uitleg 1

Bekijk de applet



Figuur 2

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.

Je wilt de vergelijking $\sin(x) = 0{,}8$ oplossen:

- Zoek de oplossing die zo dicht mogelijk bij de y-as ligt. Deze oplossing heet arcsinus van 0,8. Dit getal vind je met de grafische rekenmachine.
  De oplossing is $x = \arcsin(0{,}8) \approx 0{,}927$.
  Op de rekenmachine vind je arcsin meestal als $\sin^{-1}$.
- Zoek de andere oplossing in dezelfde periode door symmetrie te gebruiken.
  Die oplossing is: $x = \pi - \arcsin(0{,}8)$.
- Omdat de periode 2π is, zijn de oplossingen:
  $x = \arcsin(0{,}8) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(0{,}8) + k \cdot 2\pi$ met k een geheel getal.

Bekijk de oplossingen van de vergelijkingen:

$\sin(x) = 1$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

$\sin(x) = -1$ geeft $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

$\sin(x) = 0$ geeft $x = 0 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$.
Voeg dit samen tot $x = k \cdot \pi$.

Als in $\sin(x) = c$, de c groter is dan 1 of kleiner is dan -1 zijn er geen oplossingen.

Als $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.
Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}2$

b $\sin(x) = -0{,}2$

Opgave 2

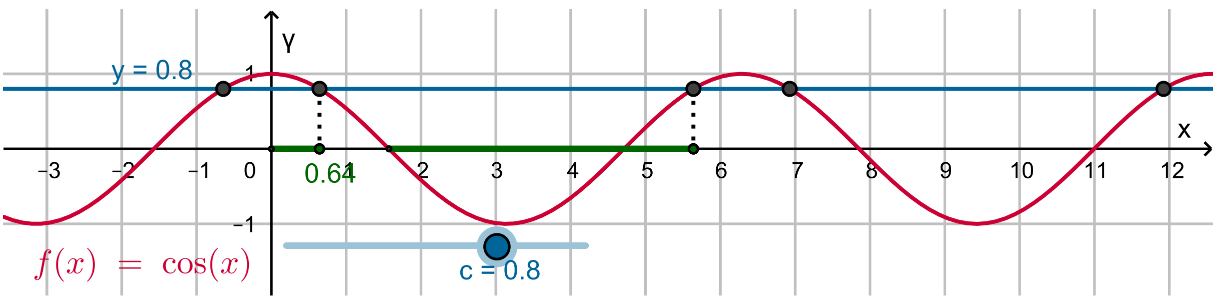
Los exact op.

a $\sin(x) = \frac{1}{2}$

b $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Uitleg 2

Bekijk de applet



Figuur 3

Bekijk de grafiek van $y = \cos(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.

Je wilt de vergelijking $\cos(x) = 0{,}8$ oplossen:

- Zoek de eerste oplossing die zo dicht mogelijk bij de verticale as ligt.
  Deze oplossing heet arccosinus van 0,8. De oplossing is: $x = \arccos(0{,}8) \approx 0{,}644$.
- Zoek een andere oplossing binnen één periode door symmetrie te gebruiken.
  Die oplossing is: $x \approx -0{,}644$ of $x \approx 2\pi - 0{,}644$ (kies één van beide).
- Omdat de periode 2π is, zijn alle oplossingen:
  $x \approx 0{,}644 + k \cdot 2\pi \vee x \approx -0{,}644 + k \cdot 2\pi$

Bekijk de oplossingen van de vergelijkingen:
$\cos(x) = 1$ geeft $x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi$
$\cos(x) = -1$ geeft $x = \pi + k \cdot 2\pi$
$\cos(x) = 0$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

Als in $\cos(x) = c$, de c groter dan 1 of kleiner dan -1 is, zijn er geen oplossingen.

Bij $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.
Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}2$

b $\cos(x) = -0{,}2$

Opgave 4

Los exact op.

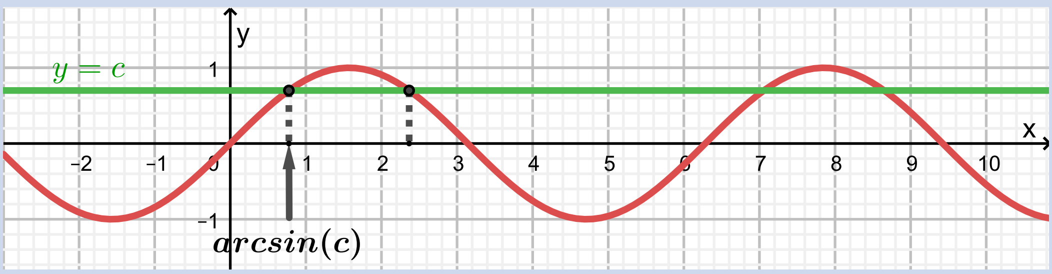
a $\cos(x) = -1$

b $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



Figuur 4

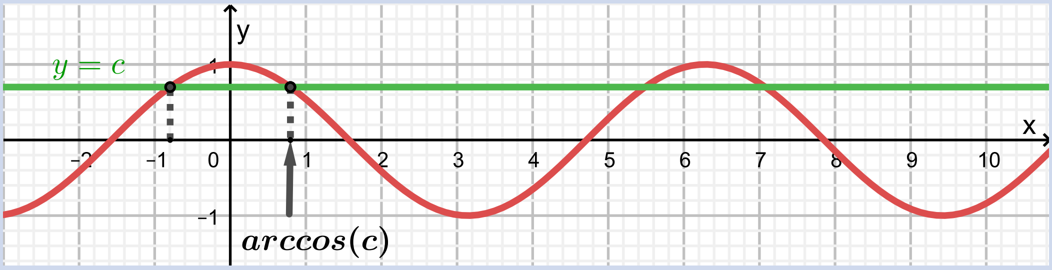
De oplossing van $\sin(x) = c$ die binnen $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ ligt, heet de **arcsinus** van c: $x = \arcsin(c)$.

Binnen één periode is er (vaak) nog een oplossing.
Vanwege de symmetrie van de grafiek is die tweede oplossing $x = \pi - \arcsin(c)$.

Vanwege de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\sin(x) = c$ daarom:
$x = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$

De vergelijking $\sin(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Bekijk de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



Figuur 5

De oplossing van $\cos(x) = c$ binnen $[0,\pi]$ heet **arccosinus** van c: $x = \arccos(c)$.

Binnen één periode is er vaak nog een oplossing.
Vanwege de symmetrie van de grafiek is de tweede oplossing: $x = -\arccos(c)$.

Vanwege de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\cos(x) = c$ daarom:
$x = \arccos(x) + k \cdot 2\pi \vee x = -\arccos(x) + k \cdot 2\pi$

De vergelijking $\cos(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Voorbeeld 1

Los op: $\sin(x) = \frac{1}{2}$ met x in $[0,3\pi]$.
Gebruik twee manieren: met de grafische rekenmachine en exact. Maak gebruik van symmetrie.

Antwoord

Plot de grafieken van $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = 0{,}5$ op het gegeven interval met venster $[0,3\pi] \times [-1,1]$.
Dit geeft vier oplossingen.

De eerste oplossing is: $x = \arcsin(0{,}5) \approx 0{,}524$.

De andere oplossingen zijn:
$x \approx 0{,}524 \vee x \approx \pi - 0{,}524 \vee x \approx 0{,}524 + 2\pi \vee x \approx \pi - 0{,}524 + 2\pi$
$x \approx 0{,}524 \vee x \approx 2{,}618 \vee x \approx 6{,}807 \vee x \approx 8{,}901$

De eerste oplossing is exact: $x = \frac{1}{6}\pi$.

Op het gegeven interval zijn de vier oplossingen:

$x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \pi - \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{6}\pi + 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\frac{1}{6}\pi \vee x = 2\frac{5}{6}\pi$

Opgave 5

Los op $\sin(x) = -0{,}5$.

a Geef alle oplossingen, afgerond op drie decimalen.

b Geef alle exacte oplossingen.

c Geef alle exacte oplossingen op het interval $[0,4\pi]$.

Opgave 6

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$. Zorg dat je in ieder geval één complete periode in beeld hebt.

a Los exact op: $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b Geef alle exacte oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$.

c Geef de oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$. Rond af op drie decimalen.

Voorbeeld 2

Los exact op: $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Antwoord

Je weet: $\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Vanwege de symmetrie van de grafiek geldt dat $\cos\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Een exacte oplossing is: $x = \frac{3}{4}\pi$.

Een tweede oplossing is: $x = -\frac{3}{4}\pi$.

Alle verdere oplossingen zijn te vinden door bij deze twee oplossingen een veelvoud van de periode op te tellen:

$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

Opgave 7

Los op: $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ op $[0,2\pi]$.

a Geef alle oplossingen. Rond af op drie decimalen.

b Geef alle exacte oplossingen.

c Geef alle exacte oplossingen op het interval $[0,4\pi]$.

Opgave 8

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op $[0,2\pi]$.

a Los exact op: $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b Geef alle exacte oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$.

c Geef de oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$ in drie decimalen.

Voorbeeld 3

Los exact op: $\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Antwoord

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\ 2x &= \tfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - \tfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ x &= \tfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi \vee x = \tfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi \end{aligned}$$

Let op dat je ook $k \cdot 2\pi$ deelt door 2.

Opgave 9

Los exact op.

a $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\sin(2x) = \sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

c $\cos(2x) = \cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

Voorbeeld 4

Los op: $3 \cdot \sin(x) + 1 < 0$.

Antwoord

Plot $y = 3\sin(x) + 1$.

Herleid $3 \cdot \sin(x) + 1 = 0$ tot $\sin(x) = -\frac{1}{3}$.

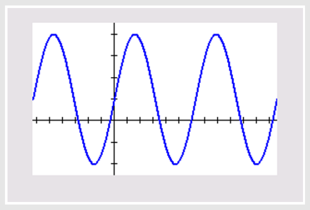
De oplossingen binnen één periode zijn (zie de grafiek):

$x = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \vee x = -\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$.

$x \approx -0{,}340 \vee x \approx -2{,}802$

De ongelijkheid klopt binnen deze periode voor $-2{,}802 < x < -0{,}340$.

Dit herhaalt zich elke periode, dus de volledige oplossing is:
$-2{,}802 + k \cdot 2\pi < x < -0{,}340 + k \cdot 2\pi$.



Figuur 6

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 3\sin(x) + 1$.

a Plot deze grafiek op $[-2\pi, 4\pi]$.

b Los $f(x) < 2$. Rond af op twee decimalen.

c Los $f(x) = 2{,}5$ exact op.

d Los $f(x) = 4$ exact op.

e Waarom kun je $f(x) = 5$ niet oplossen?

Verwerken

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.
Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen. Rond anders af op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}35$

b $\sin(x) = -0{,}35$

c $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 12

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$.
Los de vergelijkingen op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}35$

b $\cos(x) = -0{,}35$

c $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 13

Geef alle oplossingen.

a $\sin(x) = 1$

b $\sin(x) = \sin(1)$

c $\sin(1) = x$

d $\sin(x) = \cos(1)$

Opgave 14

Gegeven is de functie f met $f(x) = 2\sin(x) - 1$ op $[0{,}4\pi]$.

a Bereken alle nulpunten van de grafiek van deze functie.

b Los op: $f(x) \geq 0$

Opgave 15

Gegeven is de functie g met $g(x) = \cos(2x + 1)$ op $[0{,}4\pi]$.

a Los op: $g(x) = 0{,}5$.

b Los op: $g(x) \geq 0{,}5$

Opgave 16

Los exact op.

a $3\cos(x) + 1 = -0{,}5$

b $\sin(-\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $-8\cos(0{,}25x) = -4\sqrt{2}$

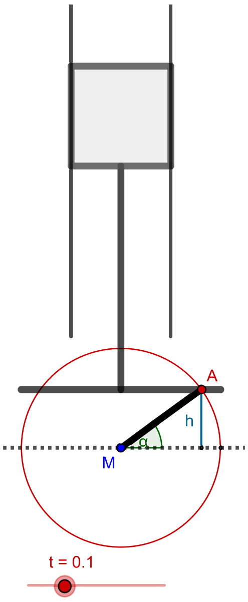
d $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een **krukstang** MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek.

De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.



Figuur 7

Opgave 17

Bekijk de formule voor de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

a In welke eenheid is h uitgedrukt?

b Welke periode heeft h als x in graden wordt uitgedrukt?
En als x in radialen wordt uitgedrukt?

c Kun je een voordeel noemen van het werken met radialen ten opzichte van het werken met graden?

Het werken met decimeters als eenheid is niet gebruikelijk, liever werk je met meter, centimeter, millimeter.

d Hoe wordt het functievoorschrift voor de hoogte als je in mm werkt?
En wat verandert er dan aan de grafiek?

Opgave 18

De formule voor h in cm als functie van x in radialen is $h = 10 \cdot \sin(x)$.

a Maak de grafiek van h.

b Bij welke waarden voor x is $h(x) = 5$ cm?

c Bij welke waarden voor x is $h(x) = -5$ cm?

Testen

Opgave 19

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$.
Los de volgende vergelijkingen op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

a $\cos(x) = 0{,}95$

b $\cos(x) = -0{,}95$

c $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Opgave 20

Gegeven is de functie $f(x) = 4\cos(x) + 1$ op $[-2\pi, 2\pi]$.

a Bereken alle nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Los op $f(x) < 0$.

Opgave 21

Los exact op: $\sin(3x) = 0{,}5$.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met sinus en cosinus**. Je ziet hier alleen vergelijkingen met sinus, het gaat soms om exacte waarden. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.