7.2 Sinus- en cosinusfuncties

Inleiding

Nu je weet dat draaihoeken alle waarden (zowel in graden als in radialen) kunnen aannemen en dat daar steeds een waarde voor de sinus en een waarde voor de cosinus van die hoek bij horen, kun je gaan kijken naar de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$. En je zult zien dat daarbij een herhaling optreedt met een vaste periode. Daarover gaat dit onderdeel. Je neemt x altijd in radialen.

Je leert in dit onderwerp

- met de functie en de grafiek van $y = \sin(x)$ en transformaties daarvan werken;
- met de functie en de grafiek van $y = \cos(x)$ en transformaties daarvan werken.

Voorkennis

- werken met sinus en cosinus van hoeken in radialen en met de eenheidscirkel;
- werken met transformaties van grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Maak op je grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-2\pi, 4\pi]$. Neem x in radialen.

a Leg uit waarom de hoogste waarde die $\sin(x)$ kan aannemen 1 is.

b Voor welke waarden van x is $\sin(x) = -1$?

c De waarden van f herhalen zich steeds. Waarom is dat zo?

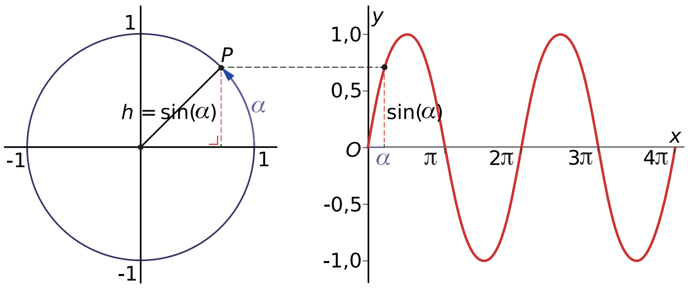
d Maak ook de grafieken van $y_2 = 2\sin(x)$, $y_3 = \sin(2x)$, $y_4 = \sin(x) + 2$ en $y_5 = \sin(x + 2)$. Verklaar welke transformaties hier worden toegepast.

Uitleg 1

Bekijk de applet: sinusfunctie

$y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode 2π.
Hierin is $x = \alpha$ radialen en op de y-as komt de waarde van $h = \sin(\alpha)$.
De grafiek loopt links en rechts van de y-as oneindig door als je α niet beperkt vanaf 0 tot 2π rad.

Bekijk de figuur, waar twee periodes van de grafiek van $y = h = \sin(x)$ zijn getekend.



Figuur 1

Op de horizontale as is de eenheid π, zodat exact de snijpunten met de x-as en de toppen zijn af te lezen.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi$.
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi$.
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$.

Wil je alle waarden weten waarvoor bijvoorbeeld $h = y = 0{,}5$ dan los je de vergelijking $\sin(x) = 0{,}5$ op met je rekenmachine.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ in **Uitleg 1**.

a Geef de coördinaten van de toppen op het domein $[-2\pi, 2\pi]$.

b Welke nulpunten heeft f op het domein $[-2\pi, 4\pi]$?

Opgave 2

Plot de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-10, 10]$. Denk om x in radialen!

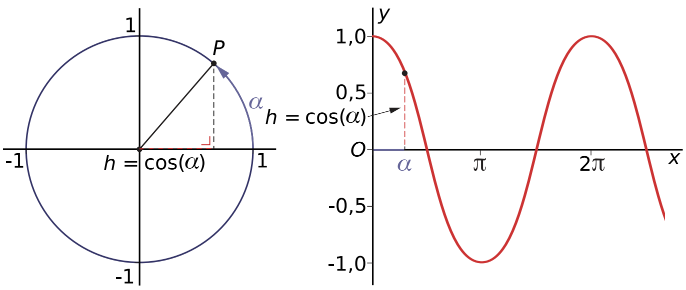
Hoe vaak snijdt de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ de x-as op het domein $[-10, 10]$?

Uitleg 2

Bekijk de applet: cosinusfunctie

$y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode 2π.
Hierin is $x = \alpha$ radialen en op de y-as komt de waarde van $h = \cos(\alpha)$.
De grafiek loopt links en rechts van de y-as oneindig door als je α niet beperkt vanaf 0 tot 2π rad.

Bekijk de figuur met twee periodes van de grafiek van $y = \cos(x)$.



Figuur 2

Op de horizontale as is als eenheid π genomen.

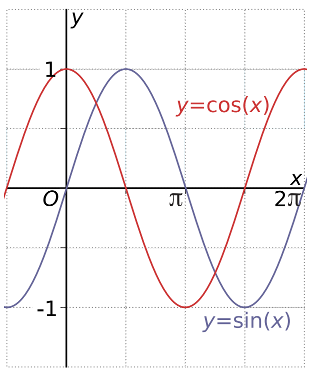
- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $2k \cdot \pi$.
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + 2k \cdot \pi$.
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De grafiek van $y = \cos(x)$ met x in radialen lijkt op de standaard sinusgrafiek $y = \sin(x)$.

De grafiek is alleen met $-\frac{1}{2}\pi$ verschoven in de x-richting.

Dit betekent $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je door transformatie uit die van $y = \sin(x)$ laten ontstaan.



Figuur 3

Opgave 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ in **Uitleg 2**.

a Geef de coördinaten van de toppen op het domein $[-2\pi, 2\pi]$.

b Welke nulpunten heeft f op het domein $[-2\pi, 4\pi]$?

Opgave 4

In **Uitleg 2** zie je de functie $y = \cos(x)$.

a Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $f_1(x) = 5 \cdot \cos(x)$ uit die van $y = \cos(x)$?

b Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $f_2(x) = \cos(x + \pi)$ uit die van $y = \cos(x)$?

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $f_3(x) = 5 \cdot \cos(x + \pi) + 2$ uit die van $y = \cos(x)$?

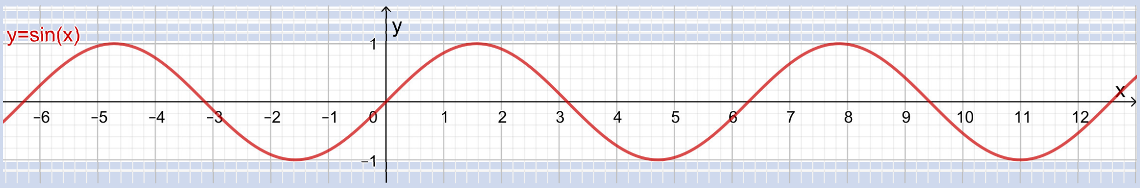
d Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit die van $y = \cos(x)$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Exacte waarden		
hoek	**sin**	**cos**
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0

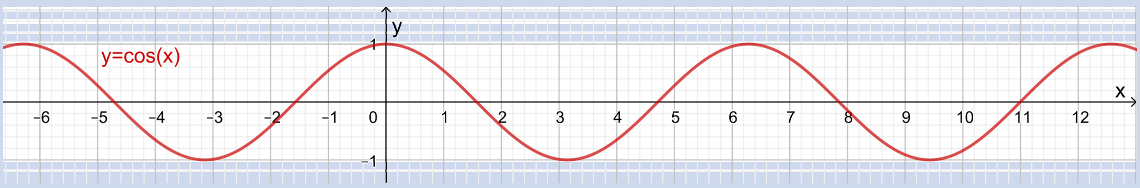
Tabel 1



Figuur 4

De **standaard sinusfunctie** $y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$



Figuur 5

De **standaard cosinusfunctie** $y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

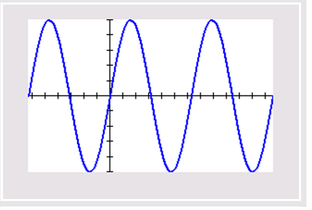
De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je laten ontstaan door de grafiek van $y = \sin(x)$ te verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x-richting: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

Voorbeeld 1

Maak op de grafische rekenmachine de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-2\pi, 4\pi]$.

$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, voor welke andere waarden op het gegeven domein is de sinus even groot?

Antwoord



Figuur 6

Gebruik de symmetrie van de grafiek.

$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π.

Daarom geldt dat $\sin(x) = \frac{1}{2}$ als $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Voor de volgende waarden binnen het gegeven domein is $\sin(x) = \frac{1}{2}$:

$x = -1\frac{5}{6}\pi$, $x = -1\frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = 2\frac{1}{6}\pi$ en $x = 2\frac{5}{6}\pi$.

Opgave 5

a Plot de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-3\pi, 5\pi]$.

b Je weet $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Voor welke waarden op het gegeven domein is de sinus even groot?

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0; 6{,}5\pi]$.

a Plot de grafiek van f. Hoeveel periodes zijn zichtbaar?

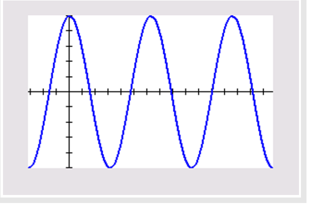
b Voor welke waarden van x in het gegeven domein, geldt $f(x) = \sin(-0{,}1)$? Rond af op drie decimalen.

Voorbeeld 2

Maak op de grafische rekenmachine de grafiek van $y = \cos(x)$ op het domein $[-\pi, 5\pi]$.

$\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, voor welke andere waarden op het domein is de cosinus even groot?

Antwoord



Figuur 7

Gebruik de symmetrie van de grafiek.

$\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

De periode van $y = \cos(x)$ is 2π.

Daarom geldt dat $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als: $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

Voor de volgende waarden binnen het gegeven domein is $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$:

$x = -\frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = 1\frac{3}{4}\pi$, $x = 2\frac{1}{4}\pi$, $x = 3\frac{3}{4}\pi$, $x = 4\frac{1}{4}\pi$ en $x = 4\frac{3}{4}\pi$.

Opgave 7

a Plot de grafiek van $y = \cos(x)$ op het domein $[-3\pi, \pi]$.

b $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ voor welke waarden op het gegeven domein is de cosinus even groot?

Opgave 8

Gegeven is $y = \cos(x)$.

a Welk domein moet je nemen, zodat de grafiek bij punt $(0,1)$ begint en er precies drie periodes zichtbaar zijn?

b Welk domein moet je nemen, zodat de grafiek bij punt $(-\pi, -1)$ begint en er precies vijf periodes zichtbaar zijn?

c Welk domein moet je nemen, zodat de grafiek bij $(3{,}5\pi; 0)$ eindigt en er precies 6,5 periodes zichtbaar zijn?

Voorbeeld 3

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van $f(x) = 2\cos(x - \pi) + 1$ uit de standaardgrafiek van $y = \cos(x)$?

Antwoord

De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \cos(x)$ door achtereenvolgens:

- Translatie ten opzichte van de y-as met π.
- Vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 2.
- Translatie ten opzichte van de x-as met 1.

Opgave 9

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van $f(x) = 0{,}5\cos(x + 0{,}25\pi) - 3$ uit de grafiek van $y = \cos(x)$?

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = -2\sin(x - 1) + 4$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$ ontstaan?

b Hoe groot is het maximum van f?

c Hoe groot is het minimum van f?

Verwerken

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0, 4\pi]$.

a Plot de grafiek van f op het gegeven domein.
Hoeveel periodes zijn zichtbaar?

b Je weet $\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Voor welke andere waarden op het domein is de sinus even groot?

Opgave 12

Voor welke exacte waarden voor x in het domein $[-4\pi, 4\pi]$ heeft $\cos(x)$ eenzelfde waarde als $\cos(0{,}8)$?

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \text{-}\sin(x-3)+2$ met domein $[0,4\pi]$.

a Plot de grafiek van f.

b Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y=\sin(x)$?

c Geef de coördinaten van de toppen.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5\cos(x+\pi)+4$ met domein $[\text{-}2\pi,4\pi]$.

a Plot de grafiek van f.

b Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y=\cos(x)$?

c Geef de coördinaten van de toppen.

Opgave 15

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van $f(x) = 2\cos(x-\pi)-6$ uit de grafiek van $y=\sin(x)$?

Toepassen

Bekijk de applet: sinusfunctie

Je ziet in de applet een **analoge klok**. De lengte van de grote wijzer is 1 dm, die van de kleine wijzer 7,5 cm. Je kunt zelf de gewenste tijd instellen.

Trek (in gedachten) een horizontale lijn door de punten die horen bij 9 en bij 3. Je kunt dan de hoogte van het eindpunt van elk van de wijzers boven die lijn berekenen. Ligt zo'n eindpunt op of boven die lijn, is de hoogte positief of 0, anders negatief. Noem die hoogte h.

Trek (in gedachten) een verticale lijn door de punten die horen bij 6 en bij 12. Je kunt dan de horizontale afwijking van het eindpunt van elk van de wijzers tot die lijn berekenen. Ligt zo'n eindpunt rechts of op die lijn, is de afwijking positief of 0, anders negatief. Noem die horizontale afwijking b.

Opgave 16

De wijzers van de klok staan ingesteld op kwart over twee.

a Bereken h en b van de minutenwijzer. Rond af op twee decimalen.

b Bereken h en b van de urenwijzer. Rond af op twee decimalen.

Werk met een medeleerling samen. Stel een andere tijd in.

c Bereken h en b van de minutenwijzer en de urenwijzer. Rond af op twee decimalen.

Opgave 17

De wijzers van de klok draaien eigenlijk vanuit de verticale stand, dan is de draaihoek $x=0$ rad. Bovendien bewegen de wijzers rechtsom in plaats van linksom zoals in een assenstelsel gebruikelijk is.

a Leg uit waarom voor de minutenwijzer dan geldt $h=\cos(x)$ en $b=\sin(x)$.

b Welke formules gelden voor h en b van de urenwijzer?

Bij een bepaald tijdstip hoort meestal een andere waarde voor x bij de minutenwijzer dan bij de urenwijzer.

c Zijn er tijdstippen waarop bij beide wijzers dezelfde draaihoek x hoort?

Testen

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 4\sin(x) + 1$ op $[-2\pi, 4\pi]$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = \sin(x)$?

b Plot de grafiek van f. Hoeveel periodes krijg je in beeld?

c Bepaal alle toppen van de grafiek van f.

Opgave 19

Je weet dat $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 0{,}5$. Welke waarden van x geldt ook dat $\cos(x) = 0{,}5$ als x in het domein $[5\pi, 8\pi]$ zit?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.