7.1 Radialen

Inleiding

Een punt dat met een vaste snelheid over een cirkel beweegt, volgt een eenparige cirkelbeweging. Dit is een belangrijk periodiek verschijnsel. De hoogte van dit punt boven de horizontale as kun je met behulp van de sinus van de draaihoek berekenen. Heeft de cirkel een straal van 1 dan is die hoogte gelijk aan de sinus van de hoek. Bij de eenparige cirkelbeweging komt vanzelf een nieuwe manier tevoorschijn om de grootte van een hoek aan te geven: in radialen in plaats van in graden.

Je leert in dit onderwerp

- graden omrekenen naar radialen en omgekeerd;
- werken met de exacte waarden van sinus en cosinus ook voor niet-scherpe hoeken m.b.v. de symmetrie-eigenschappen van de eenheidscirkel.

Voorkennis

- de formule voor de omtrek van een cirkel;
- werken met sinus en cosinus in rechthoekige driehoeken.

Verkennen

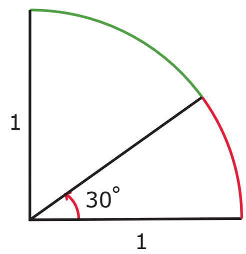
Opgave V1

Bekijk de applet

Hoeken druk je al heel lang in graden uit. Toch hoeft dat niet, bekijk deze kwartcirkel maar eens. Hij heeft een straal van 1. Er staat een hoek van 30° in getekend.

a Hoe lang is de getekende cirkelboog? Leg uit waarom 30° overeenkomt met een booglengte van $\frac{1}{6}\pi$.

Als je de grootte van een hoek door zijn booglengte in een cirkel met straal 1 beschrijft, krijg je hoeken in ‘radialen’. Dus 30° komt overeen met $\frac{1}{6}\pi$ radialen.



Figuur 1

b Waarom is het van belang dat de cirkel waarin je de booglengte uitrekent een straal van 1 heeft?

c Reken maar eens een paar andere hoeken om van graden naar radialen.

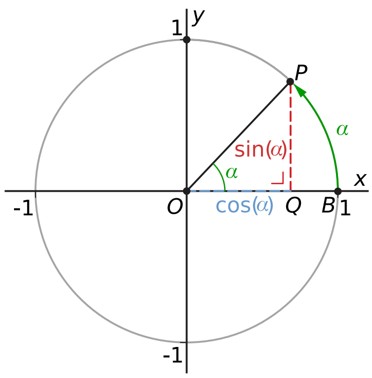
Uitleg 1

Bekijk de applet

Bekijk het punt P dat linksom (tegen de klok in) draait over een eenheidscirkel, een cirkel met een straal van 1.
Straal OP maakt een hoek α met de positieve x-as. Er geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{y_P}{1} = y_P$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{x_P}{1} = x_P$$



Figuur 2

De driehoek is alleen te gebruiken als $0° < \alpha < 90°$. Maar het punt draait gewoon door, evenals de hoek. Op deze manier wordt de sinus en cosinus gedefinieerd voor draaihoeken van 90° en groter. Zo is $\sin(180°) = 0$, $\sin(270°) = -1$ en $\sin(90° + k \cdot 360°) = 1$ met k een geheel getal;

$\cos(180°) = -1$, $\cos(270°) = 0$ en $\cos(k \cdot 360°) = 1$ met k een geheel getal;

Sinus en cosinus kunnen dus ook een negatief getal zijn.

Het punt kan rechtsom (met de klok mee) draaien, je krijgt dan negatieve groottes van hoeken.

De grootte van hoeken kun je weergeven in graden, maar ook als booglengte BP. De eenheid voor deze hoek heet radiaal, afgekort rad.

De omtrek van een cirkel met straal r is $2 \cdot \pi \cdot r$.
In een eenheidscirkel met $r = 1$ is de omtrek dus gelijk aan 2π.

Bij 360° hoort dus een booglengte van 2π en een hoek van 2π rad.
Bij 180° hoort dus een booglengte van π en een hoek van π rad.

Hoeken worden vanaf nu, tenzij anders vermeld, gegeven in radialen.

Om graden om te rekenen naar radialen gebruik je $180° = \pi$ rad.

Bijvoorbeeld: omdat $1° = \frac{1}{180}\pi$ rad is $40° = \frac{40}{180}\pi$ rad $= \frac{2}{9}\pi$ rad.

Merk op dat $\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin(\alpha)$ (k geheel), je hebt dan alleen een extra rondje gedraaid. Hetzelfde geldt voor cosinus.

Opgave 1

Teken een eenheidscirkel (een cirkel met een straal van 1 eenheid).

Gebruik je rekenmachine met hoeken in graden.

a Teken P als de draaihoek $\alpha = 30°$.
Hoeveel radialen is α?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.

b Teken P als de draaihoek $\alpha = 150°$.
Hoeveel radialen is α?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.

c Teken P als de draaihoek $\alpha = 210°$.
Hoeveel radialen is α?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.

d Teken P als de draaihoek $\alpha = 270°$.
Hoeveel radialen is α?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.

e Hoeveel radialen hoort er bij 360°? En bij 90°?

f Bij welke draaihoeken is de y-coördinaat 1? Geef je antwoord in graden en in radialen.

Opgave 2

In **Uitleg 1** zie je hoe je kunt omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.

a Hoeveel radialen is 60°?

b Hoeveel graden is $1{,}5\pi$ rad?

c Hoeveel graden is 1 rad?

d Hoeveel radialen is 1°?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je weet al dat bij bepaalde scherpe hoeken exacte waarden horen voor sinus en cosinus.

Je vindt ze in deze tabel, waarbij de hoek in graden en in radialen is gegeven. Leer de tabel uit het hoofd.

hoek in graden	0°	30°	45°	60°	90°
hoek in radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabel 1

Met behulp van de symmetrie van de eenheidscirkel kun je ook de exacte waarde van bijvoorbeeld $\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right)$ bepalen.

Je ziet dat: $\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

en dat: $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Opgave 3

Bepaal met behulp van de symmetrie van de eenheidscirkel de exacte waarden.

a $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

b $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$

c $\cos\left(3\frac{1}{3}\pi\right)$

d $\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$

Opgave 4

Ook als er van exacte waarden geen sprake is, zijn er meerdere draaihoeken met dezelfde sinus of dezelfde cosinus.

a Bereken in drie decimalen $\sin(1)$ en $\sin(1 + 2\pi)$. Leg uit waarom beide uitkomsten gelijk zijn.

b Bereken $\sin(1)$ en $\sin(\pi - 1)$. Leg uit waarom beide uitkomsten gelijk zijn.

c Welke hoeken hebben dezelfde sinus als $212{,}5\pi$?

d Welke hoeken hebben dezelfde sinus als -1500π?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

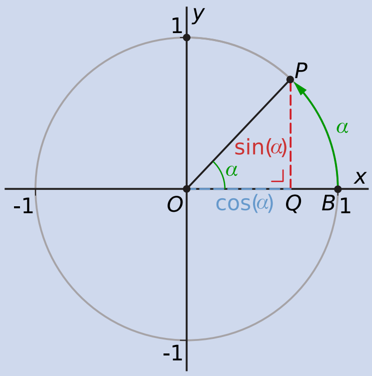
Bekijk de **eenheidscirkel** (cirkel met straal 1) met het middelpunt in O. Punt P ligt op de eenheidscirkel.

Voor de **draaihoek** van P is de **booglengte** genomen vanaf hier (1,0), tot het draaiende punt P. Bij linksom draaien is deze hoek positief, bij rechtsom draaien negatief.

Er geldt:

$\sin(\alpha) = \frac{y_P}{1} = y_P$

$\cos(\alpha) = \frac{x_P}{1} = x_P$



Figuur 3

De eenheid voor deze hoek heet **radiaal**, afgekort rad. Op de eenheidscirkel hoort bij een draaihoek van 1 rad een booglengte van 1. 180° komt dan overeen met π rad (de halve omtrek van de eenheidscirkel).

Tenzij anders aangegeven, wordt in het vervolg de hoekeenheid rad gebruikt. Je kunt de grafische rekenmachine instellen op rekenen met radialen.

Merk op dat $\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos(\alpha)$ (k geheel).

Voorbeeld 1

Gebruik bij het omrekenen van graden naar radialen: 360° is gelijk aan 2π radialen.
Hieruit volgt:

- 1° wordt $\frac{2\pi}{360} = \frac{1}{180}\pi$ rad.
- 90° wordt $90 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{1}{2}\pi$ rad.

En omgekeerd:

- 1 rad komt overeen met $\left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} = 57{,}295...^{\circ}$.
- $\frac{1}{6}\pi$ rad komt overeen met $\left(\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} = 30^{\circ}$.

Je kunt zo deze handige tabel maken:

graden	360	180	90	45	30	1
radialen	2π	π	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{180}\pi$

Tabel 2

Opgave 5

Neem de tabel over en vul hem in.

graden	0	18		220		540
radialen			$\frac{5}{9}\pi$		2π	

Tabel 3

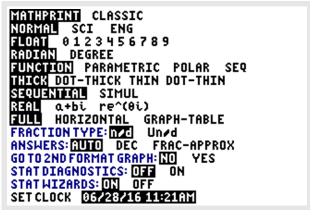
Voorbeeld 2

Bepaal met de rekenmachine $\sin(1)$, $\sin(10)$, $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$, $\sin(360)$ en $\sin(10+30\pi)$.

Welke waarden zijn hetzelfde?

Antwoord

Reken in radialen, want er zijn geen gradentekens. Laat de rekenmachine dan ook in radialen rekenen.



Figuur 4

Ga na dat:
$\sin(1) \approx 0{,}841$
$\sin(10) \approx -0{,}544$
$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 0{,}5$
$\sin(360) \approx 0{,}959$
$\sin(10+30\pi) \approx -0{,}544$

De uitkomsten van $\sin(10)$ en $\sin(10+30\pi)$ zijn gelijk omdat tussen 10 en $10+30\pi$ precies 30π zit. Dat is precies 15 keer één volledige cirkel (lengte 2π).

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Bepaal in drie decimalen nauwkeurig $\sin\left(\frac{1}{55}\pi\right)$.

b Leg uit waarom $\sin\left(40\frac{1}{55}\pi\right)$ dezelfde uitkomst geeft.

c Geef nog twee verschillende waarden voor x waarvoor geldt: $\sin\left(\frac{1}{55}\pi\right) = \sin(x)$.

Opgave 7

De draaihoeken kun je ook gewoon x noemen. Dat is later handig als je grafieken van de sinusfunctie en de cosinusfunctie gaat maken.

a Leg uit waarom $\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi)$ en $\cos(x) = \cos(x + k \cdot 2\pi)$, waarbij k een geheel getal is.

b Welke waarden kunnen $\sin(x)$ en $\cos(x)$ aannemen?

c Waarom is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ exact $\frac{1}{2}$?

d Geef de volgende waarden exact: $\sin\left(5\frac{1}{6}\pi\right)$, $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$, $\sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right)$.

Voorbeeld 3

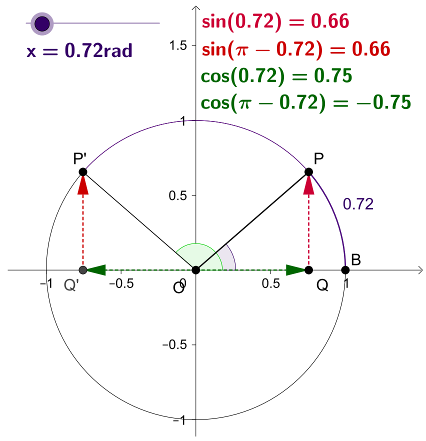
Bekijk de applet

De grootte van hoek x is in radialen.
Verklaar waarom $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.

Antwoord

Bekijk de figuur met de punten P en P' op een eenheidscirkel, achtereenvolgens met hoek x en $\pi - x$.

In de eenheidscirkel liggen deze punten bij de hoeken x en $\pi - x$ symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door het middelpunt. Er geldt: $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.



Figuur 5

Opgave 8

Bekijk de figuur uit **Voorbeeld 3**.

a Bereken de grootte van $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ en $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$. Geef exacte antwoorden.

b Waarom zijn bij a beide antwoorden hetzelfde?

c Voor welke hoek geldt dat de sinus hetzelfde is?

d Voor welke hoeken is $\cos(x) = 0{,}5$?

Opgave 9

Leg uit waarom:

a $\sin(-x) = -\sin(x)$

b $\cos(x) = \cos(-x)$

c $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

Verwerken

Opgave 10

Deze hoeken zijn gegeven in graden. Bereken de bijbehorende booglengtes in de eenheidscirkel in radialen.

a 30°, 20°, 10°, 270°, 360°, 455°, 780°

De booglengtes zijn in de eenheidscirkel gegeven. Bereken de bijbehorende hoeken in graden.

b $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{1}{3}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$; 1; π; 3,1416; 10π

Opgave 11

Gebruik eventueel een eenheidscirkel.

a Bereken exact $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$, $\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)$, $\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$.

b Bereken exact de grootte van $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$, $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$, $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$, $\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)$ en $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$.

Opgave 12

Gegeven is $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

a Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x met $0 \leq x < 2\pi$ aan die hieraan voldoen.

b Noteer alle waarden van x die hieraan voldoen. Geef exacte waarden.

Opgave 13

Je weet, dat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$.

Onderzoek welke waarden van x voldoen aan $\sin(x) = -\frac{1}{2}$.

a Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x op het interval $[0,2\pi]$ aan die hieraan voldoen.

b Geef alle waarden van x die hieraan voldoen. Gebruik exacte waarden.

Opgave 14

Leg uit waarom:

a $\sin(x) = \sin(3\pi - x)$

b $\cos(x) = \cos(6\pi - x)$

c $\cos(x) = \sin(x - 21{,}5\pi)$

Toepassen

In de studie van periodieke verschijnselen wordt het begrip **hoeksnelheid** gebruikt.
De hoeksnelheid ω van een object dat gelijkmatig beweegt over een cirkel, in radialen per tijdseenheid, is gedefinieerd als:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Hierin is T de omwentelingstijd, dat is de tijd die één complete omwenteling duurt.

Een ander begrip is de **raaksnelheid**.
Dit is de afstand die een vast punt dat gelijkmatig beweegt over een cirkel, per tijdseenheid aflegt.

Opgave 15

De omtrek van de aarde (om de evenaar) is ongeveer 40075 km.

a Hoe groot is de hoeksnelheid van de rotatie van de aarde om haar eigen as, in radialen per uur?

b Stel je voor dat je op de evenaar stilstaat. Wat is je raaksnelheid (km/h)? Rond af op één decimaal.

c Gebruik de resultaten uit a en b en onderzoek het verband tussen de hoeksnelheid ω en raaksnelheid v van de aarde. Onderzoek vervolgens het verband tussen hoeksnelheid en raaksnelheid van roterende objecten in het algemeen.

Testen

Opgave 16

Geef de antwoorden exact indien mogelijk, anders in drie decimalen benaderd.

a Deze hoeken zijn gegeven in graden. Reken om naar radialen, tussen 0 en 2π:
$60°$, $45°$, $180°$, $300°$, $330°$, $350°$, $-350°$.

b Deze booglengtes van een eenheidscirkel zijn gegeven in radialen. Bereken de bijbehorende hoeken in graden.

π, $\frac{1}{3}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi$, 2π, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{12}\pi$, 2, $\frac{5}{3}\pi$.

Opgave 17

Gegeven $\sin(x) = 0{,}25$.

a Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x met $0 \leq x < 2\pi$ aan die hieraan voldoen.

b Schrijf alle waarden van x op die hieraan voldoen. Benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

a Bereken $\sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi\right)$ en $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$. Verklaar het verschil.

b Bereken $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ en $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ exact. Verklaar de overeenkomst.

c Laat zien dat $\sin(-x) = \sin(\pi + x)$ met behulp van een eenheidscirkel.

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.