6.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Machtsfuncties**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- recht evenredig met een macht — machtsverbanden;
- machtsfuncties, eigenschappen afhankelijk van exponent — machtsvergelijking;
- kwadratische functie — dal- en bergparabool — top — symmetrieas — kwadratische vergelijking;
- *abc*-formule;
- gebroken functie — wortelfunctie.

Activiteitenlijst

- machtsverbanden herkennen — heen- en terugrekenen bij machtsverbanden;
- de eigenschappen van machtsfuncties vinden — werken met transformaties van machtsfuncties;
- kwadratische functies tekenen — kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen;
- kwadratische functies schrijven als machtsfuncties — de *abc*-formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met gebroken functies en wortelfuncties die als machtsfuncties zijn te schrijven.

Achtergronden

Een kwadraat is (de oppervlakte van) een vierkant, in de Oudheid werden kwadraten altijd door vierkanten voorgesteld. En (vierkants)wortels zijn de lengten van de zijden van een vierkant. Heel lang kon daar alleen meetkundig mee worden gemanipuleerd, want in de Oudheid waren de enige getallen 1, 2, 3, ... en de verhoudingen van die getallen (breuken dus).

En daarmee was bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ geen getal, maar kon alleen worden benaderd met getallen. Hetzelfde gold voor kubussen (derde machten zouden wij zeggen) en kubische wortels (derdemachts wortels). Maar heel af en toe waren dat getallen, meestal niet. Toch werd met dergelijke machten gewerkt, maar steeds als vierkant of kubus. Ook gewone getallen (meetbare getallen) waren eigenlijk concrete lengtes net als wortels en π (onmeetbare getallen). Tot ruim voorbij de Middeleeuwen werd op die manier over getallen gedacht.

Vergelijkingen werden geformuleerd in termen van 'een vierkant en een lengte zijn samen 90, hoe groot is die lengte?'.
Nu noteer je dat als $x^2 + x = 90$ en dan wil je weten hoe groot x is.
Na de Griekse wiskundige **Diophantos** hielden vooral geleerden uit het grote Islamitische Rijk dat van 622 tot 1450 het Midden-Oosten domineerde zich met het oplossen van kwadratische vergelijkingen bezig. De wiskundige **Al-Khwarizmi** bedacht de abc-formule, hoewel hij totaal andere notaties gebruikte.

Pas veel later ontstonden in West-Europa de moderne notaties zoals de gewoonte om letters te gebruiken voor variabelen en het wortelteken. Ook werd het getalbegrip verruimd, zodat alle wortels als getallen werden opgevat.

Figuur 1

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 10 - 2(x-1)^5$.

a Laat zien door welke transformaties de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^5$.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de beide coördinaat-assen.

c Los exact op: $f(x) = 496$.

d Los exact op: $f(x) > 8$.

Opgave 2

Los de vergelijkingen en ongelijkheden exact op.

a $-0{,}5(x-2)^4 + 45 \leq 4{,}5$

b $x(x-2) = 3x - 6$

c $x^3 - 4x^2 = 10x$

d $6 - 0{,}1(x-3)^{\frac{1}{3}} = 5$

e $\frac{1}{4}x^2 \geq x + 5$

f $\frac{4}{(x-2)^3} - 6 = 14$

Opgave 3

Gegeven is voor elke waarde van p de functie $f(x) = 8 + 4px - px^2$.

a Neem $p = 1$ en bereken de karakteristieken van de grafiek van f.

b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f geen snijpunten met de x-as?

c Voor welke waarden van p ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 50 - 2x$?

Opgave 4

Een kalkoen braden is lastig, omdat het enige tijd duurt voordat ook het binnenste van de kalkoen op temperatuur komt. Hoe lang dat duurt hangt af van het gewicht. Het is de kunst om de kalkoen zo lang te braden dat het binnenste net gaar is. Je kunt dat niet controleren zonder de kalkoen aan te snijden. De optimale braadtijd is daarom moeilijk vast te stellen. Gelukkig geven kookboeken vaak aanwijzingen voor de braadtijd, die afhankelijk is van het gewicht van de kalkoen. Onderzoekers hebben vastgesteld dat met de volgende formule het beste resultaat wordt verkregen:

$t = 11g^{\frac{2}{3}}$

Hierin is g het gewicht van de kalkoen in kilogram en t de tijd in minuten die nodig is om het binnenste van de kalkoen op een temperatuur van 85 °C te brengen.

a Bereken hoe lang het bij een kalkoen van 3 kg duurt voor het binnenste op een temperatuur van 85 °C is. Verwacht je dat een kalkoen van 6 kg daarvoor twee keer zoveel tijd nodig heeft?

Als het binnenste van de kalkoen een temperatuur heeft van 85 °C duurt het nog een tijd voordat de kalkoen gaar is. Ga ervan uit dat die tijd 80 minuten is en dat die tijd niet afhangt van het gewicht van de kalkoen.

b Geef de formule voor de totale braadtijd T van een kalkoen afhankelijk van het gewicht. Is de totale braadtijd recht evenredig met een macht van het gewicht?

c Verklaar waarom het minder moeilijk is om kooktijden vast te stellen dan braadtijden. Is de kooktijd van bijvoorbeeld aardappels ook afhankelijk van het gewicht? En de totale tijd dat aardappels op het fornuis moeten staan?

Opgave 5

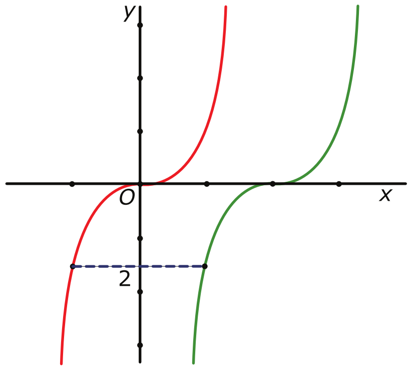
Bekijk de grafiek van $y_1 = x^3$ en de grafiek van y_2. De grafiek van y_2 ligt rechts van die van y_1 zo, dat alle verbindingslijnstukken evenwijdig aan de x-as de lengte 2 hebben.

a Geef het functievoorschrift van y_2.

b De functie $v(x)$ stelt de lengte van de verbindingslijnstukken die evenwijdig lopen aan de y-as voor. Toon aan dat $v(x) = 6x^2 - 12x + 8$.

c Voor welke waarden van x is de lengte van het verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y-as minder dan 8?

d Bepaal de lengte van het kortste verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y-as.



Figuur 2

Toepassen

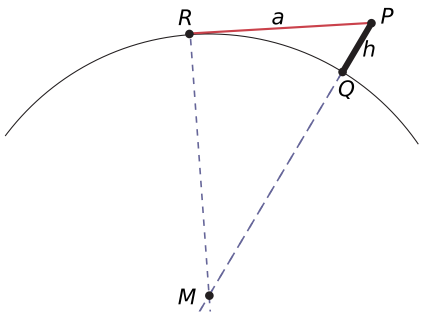
Opgave 6: Kijkafstand

De formule voor de kijkafstand uit het begin van het onderwerp ‘Machtsfuncties’ kun je heel goed zelf afleiden.

Neem eens aan dat de Aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).

Je vindt uiteindelijk iets als $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

De kijkafstand a is dus bij benadering een machtsfunctie van de hoogte h die je ogen boven het aardoppervlak zitten.



Figuur 3

a Laat zien, hoe je a kunt berekenen. Maak zo een formule voor a afhankelijk van h.

b Laat zien dat geldt $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

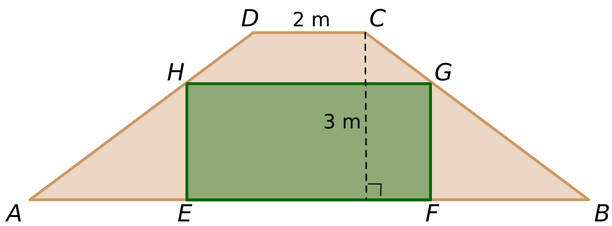
c De gevonden formule is iets anders dan die aan het begin van het onderwerp ‘Machtsfuncties’. Hoe zou dat kunnen komen?

d Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.

e Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op Aarde?

Opgave 7: Boekenkast

Boven op zolder, onder het schuine dak, maak je een rechthoekige boekenkast op zolder. Neem aan dat de zolder 10 m breed is en 3 m hoog is. De vorm van de zijmuur $ABCD$ waar de boekenkast tegenaan komt is een symmetrisch trapezium.
Wanneer is de oppervlakte van het vooraanzicht $EFGH$ van de boekenkast zo groot mogelijk?



Figuur 4

Bekijk de applet

a Experimenteer eerst met de applet.

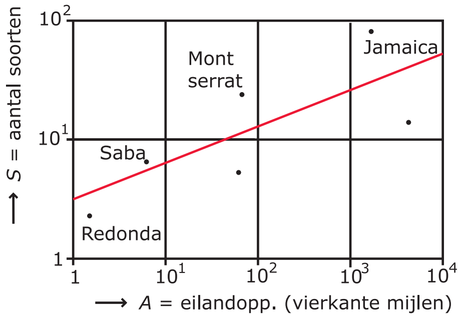
b Kies een geschikte variabele en leidt een formule af voor de oppervlakte K van het vooraanzicht.

c Bereken met behulp van die formule de maximale waarde van K.

Examen

Opgave 8: Diersoorten

Het lijkt aannemelijk dat er een verband bestaat tussen de oppervlakte van een gebied en het aantal verschillende diersoorten dat in dat gebied voorkomt. Een theorie hierover stelt dat het aantal verschillende diersoorten op een eiland in een bepaalde klimaatzone alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland. In deze opgave kijken we naar de verschillende soorten reptielen op eilanden in het Caraïbisch gebied.
Onderzoekers telden op vele eilanden het aantal verschillende soorten reptielen (S). In de volgende figuur zijn de gegevens van enkele eilanden weergegeven.



Figuur 5

Volgens de theorie is het verband tussen de oppervlakte A van een eiland (in vierkante mijlen) en het aantal soorten reptielen (S) op dat eiland te beschrijven met de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$.
De lijn in de figuur is de grafiek die bij deze formule behoort.

a Op het eiland Jamaica zijn meer soorten reptielen aangetroffen dan op grond van de theorie (de formule) verwacht mag worden. Hoeveel soorten reptielen zou een even groot eiland volgens de theorie hebben? Licht je antwoord toe.

b Binnen de theorie geldt als ruwe regel: ‘Bij een 10 keer zo groot eiland vinden we 2 keer zoveel diersoorten.’ Laat zien dat dit uit de formule volgt.

Op een groot eiland worden veel verschillende soorten reptielen met uitsterven bedreigd. Men wil maatregelen nemen om de natuur te beschermen. Daarbij moet er een keuze worden gemaakt uit twee mogelijkheden:

- Oprichting van 1 groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijlen.
- Oprichting van 2 kleinere reservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen. Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd in de bewoonde wereld en kunnen als ‘eilanden’ beschouwd worden.

Voor het schatten van het aantal soorten reptielen dat in zo’n reservaat zal voorkomen kan de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ gebruikt worden. Of voor 1 of 2 gekozen wordt, is mede afhankelijk van het aantal soorten dat de twee kleinere reservaten gemeen zullen hebben. Men neemt aan dat er 8 soorten reptielen zijn die zowel in het éne als het andere kleine reservaat zullen voorkomen. Men wil de mogelijkheden kiezen waarbij in totaal zoveel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

c Welke van de twee mogelijkheden zal men kiezen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)

Opgave 9: Tornado's

In tornado's kunnen hoge windsnelheden bereikt worden. De zwaarte of heftigheid van een tornado wordt intensiteit genoemd. Er zijn verschillende schalen om de intensiteit van een tornado uit te drukken in een getal. Zo is er de Fujita-schaal die in 1971 is ontwikkeld. Voor de intensiteit op de Fujita-schaal geldt de volgende formule:

$$F = \left(\frac{v}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en F de intensiteit van de tornado op de Fujita-schaal. F wordt afgerond op een geheel getal.
In een zware tornado worden maximale windsnelheden van ongeveer 280 km/h bereikt.

a Bereken de intensiteit van deze tornado op de Fujita-schaal.

b Een tornado met intensiteit 4 op de Fujita-schaal komt niet zo vaak voor.

Bereken de minimale waarde van v in zo'n tornado. Rond af op één decimaal.

Een andere schaal voor de intensiteit van tornado's is de in 1972 ontwikkelde Torro-schaal T. Het verband tussen v en T wordt gegeven door de formule:

$$v = 2{,}39(T + 4)^{\frac{3}{2}}$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en T de intensiteit van de tornado op de Torro-schaal. T wordt afgerond op een geheel getal.
Er bestaat een lineair verband tussen de onafgeronde F- en T-waarden.
Dit lineaire verband kan worden beschreven met een formule van de vorm $F = at + b$.

c Bereken de waarden van a en b. Rond af op twee decimalen.

(bron: examen havo wiskunde A in 2013, eerste tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.