6.5 Meer machtsfuncties

Inleiding

Alle functies die door transformatie kunnen ontstaan uit $y = x^p$ (waarin p elk willekeurig reëel getal kan zijn) zijn machtsfuncties.

Dat geldt ook voor een gebroken functie f met bijvoorbeeld als functievoorschrift $f(x) = \frac{2}{x+4} + 5$, want dit is te schrijven als $f(x) = 2(x+4)^{-1} + 5$.

En het geldt voor een wortelfunctie g met bijvoorbeeld als functievoorschrift $g(x) = 2\sqrt{x+4} + 5$, want dit kun je schrijven als $g(x) = 2(x+4)^{0,5} + 5$.
Over dergelijke functies gaat het hier.

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken functies waarvan de grafiek een hyperbool is;
- werken met wortelfuncties waarvan de grafiek een halve parabool is.

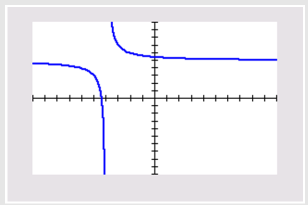
Voorkennis

- werken met machtsfuncties in het algemeen;
- transformaties toepassen op functies;
- vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van de gebroken functie f met functievoorschrift $f(x) = \frac{2}{x+4} + 5$.



Figuur 1

a Welke karakteristieken heeft de grafiek van f?

b Geef het domein en bereik van f.

c Waarom is f een machtsfunctie?

Bekijk de grafiek van de wortelfunctie g met functievoorschrift $g(x) = 2\sqrt{x+4} + 5$.

d Welke karakteristieken heeft de grafiek van g?

e Geef het domein en bereik van g.

f Waarom is g een machtsfunctie?

Uitleg

Alle functies van de vorm $f(x) = x^p$ met p een willekeurig reëel getal en alle functies die daaruit door transformatie kunnen ontstaan, heten machtsfuncties. Dat geldt voor alle lineaire en kwadratische functies, maar ook voor veel gebroken functies en veel wortelfuncties:

- Gebroken functies:
  - $f(x) = \frac{200}{x+30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie $f(x) = 200(x+30)^{-1} - 100$.
  - $g(x) = 40 - \frac{1}{x^2}$ is te schrijven als machtsfunctie $g(x) = -x^{-2} + 40$.

- Wortelfuncties:
  - $h(x) = 200\sqrt{x + 30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie $h(x) = 200(x + 30)^{\frac{1}{2}} - 100$.
  - $k(x) = 40 - \sqrt[3]{x}$ is te schrijven als machtsfunctie $k(x) = -x^{\frac{1}{3}} + 40$.

Al deze functies kun je door transformatie afleiden uit de bijbehorende machtsfunctie. Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen. Bij gebroken functies moet je rekening houden met asymptoten.

Opgave 1

Schrijf deze gebroken functies als machtsfunctie als dat mogelijk is.

a $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$

b $g(x) = \frac{1}{4+x^2}$

c $h(x) = \frac{2}{(x-3)^4} + 10$

d $k(x) = \frac{4-x}{x}$

Opgave 2

Schrijf deze wortelfuncties als machtsfunctie als dat mogelijk is.

a $f(x) = 4\sqrt{x} + 3$

b $g(x) = \sqrt{4 + x^2}$

c $h(x) = -5\sqrt{2x - 8} + 6$

d $k(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 3$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Soorten machtsfuncties.

Een **machtsfunctie** is een functie van de vorm $f(x) = a(x + b)^p + c$, waarin ook p elke reële waarde kan aannemen. Zo'n functie ontstaat door transformatie van de machtsfunctie $y = x^p$.

Voorbeelden zijn:

- $p = 0$: $f(x) = a + c$, een constante functie
- $p = 1$: $f(x) = ax + d$, een lineaire functie
- $p = 2$: $f(x) = a(x + b)^2 + c$, een kwadratische functie
- $p = \frac{1}{2}$: $f(x) = a(x + b)^{\frac{1}{2}} + c = a\sqrt{x + b} + c$, een wortelfunctie
- $p = -1$: $f(x) = a(x + b)^{-1} + c = \frac{a}{x+b} + c$, een hyperbolische functie

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{200}{x+30} - 100$. Leg uit hoe de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^{-1}$ en bereken de snijpunten met de assen en de asymptoten.

Antwoord

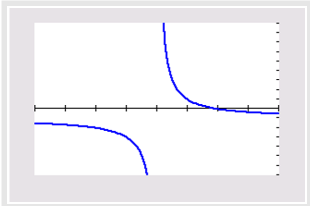
$f(x) = \frac{200}{x+30} - 100 = 200(x+30)^{-1} - 100$

De grafiek van f ontstaat door transformatie van $y = x^{-1}$:

- translatie van -30 ten opzichte van de y-as;
- vervolgens vermenigvuldiging met 200 ten opzichte van de x-as;
- ten slotte translatie van -100 ten opzichte van de x-as.

Deze transformaties kun je ook toepassen op de instellingen van het venster van de rekenmachine. Je ziet de grafiek van $y = x^{-1}$ goed in beeld als het venster is ingesteld op $[-4,4] \times [-3{,}5]$.

Dit wordt na transformatie $[-34,-26] \times [-700,900]$. Ga na, dat je dan de grafiek van f goed in beeld hebt.



Figuur 2

Je vindt verder:

- het snijpunt met de y-as: $f(0) = \frac{200}{30} - 100 = -93\frac{1}{3}$, dus dit wordt $\left(0,-93\frac{1}{3}\right)$;
- het snijpunt met de x-as: $f(x) = 0$ als $\frac{200}{x+30} = 100$ en dus $x+30 = 2$; dit geeft $x = -28$ met snijpunt $(-28,0)$;
- een verticale asymptoot: delen door 0 geeft geen reëel getal, dus $x+30 \neq 0$; de verticale asymptoot is $x = -30$ met bijbehorende limieten $\lim_{x \uparrow -30} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x \downarrow -30} f(x) = \infty$;
- een horizontale asymptoot: als x een heel groot (negatief) getal is, dan is $\frac{200}{x+30} \approx 0$ en dus wordt $f(x) \approx -100$; de horizontale asymptoot is $y = -100$ met limieten $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -100$.

Opgave 3

Bekijk de functie $g(x) = 200 - \frac{50}{(x-4)^2}$.

a Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.

b Uit welke machtsfunctie van de vorm $y = x^p$ kan de grafiek van g door transformatie ontstaan? Welke transformaties moet je achtereenvolgens toepassen?

c Bepaal de twee asymptoten van de grafiek van g.

d Bepaal het domein en het bereik van g.

e Bereken de snijpunten van de grafiek van g met de beide coördinaatassen.

Voorbeeld 2

Los op: $40 - \frac{1}{x^2} < 24$.

Antwoord

Voor het oplossen van een ongelijkheid is een grafiek handig.

De functie $y_1 = 40 - \frac{1}{x^2}$ is een machtsfunctie, want hij is te schrijven als $y_1 = -x^{-2} + 40$.

De functie ontstaat door transformatie van $y = x^{-2}$:

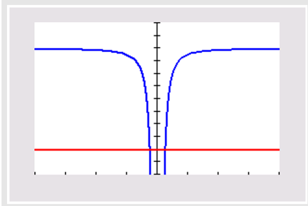
- vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de x-as (spiegelen in de x-as);
- translatie van 40 eenheden ten opzichte van de x-as.

De grafiek van $y = x^{-2}$ komt goed in beeld met venster [-4,4] × [-4,4].
De grafiek van y_1 komt goed in beeld met venster [-4,4] × [36,44].
Omdat je $y_2 = 24$ ook in beeld wilt hebben, kies je [-4,4] × [20,44].

Bij $x = 0$ zit een verticale asymptoot!

Dan los je op: $40 - \frac{1}{x^2} = 24$.

Je vindt: $x = 0{,}25 \vee x = -0{,}25$.
De oplossing van de ongelijkheid is $-0{,}25 < x < 0 \vee 0 < x < 0{,}25$.



Figuur 3

Opgave 4

Los de ongelijkheden op.

a $\frac{200}{x-40} \geq 50$

b $\frac{25}{(2x+6)^2} - 100 < 200$

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie h met $h(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$. Leg uit hoe de grafiek van h kan ontstaan uit die van $y = x^{\frac{1}{2}}$ en bereken de snijpunten met de assen.

Antwoord

$h(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie $h(x) = 200(x+30)^{\frac{1}{2}} - 100$.

Dit is een machtsfunctie die ontstaat door transformatie van $y = x^{\frac{1}{2}}$:

- translatie van -30 ten opzichte van de y-as;
- vervolgens vermenigvuldiging met 200 ten opzichte van de x-as;
- ten slotte translatie van -100 ten opzichte van de x-as.

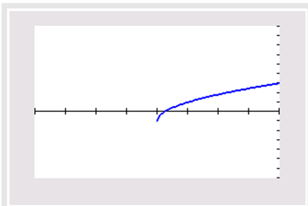
Deze transformaties kun je ook toepassen op de instellingen van het venster van de rekenmachine.

Je ziet de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ goed in beeld als het venster is ingesteld op [-4,4] × [-3,5].

Dit wordt na transformatie [-34,-26] × [-700,900]. Ga na dat je dan de grafiek van h goed in beeld hebt.

Je vindt verder:

- het snijpunt met de y-as: $h(0) = 200\sqrt{0+30} - 100 \approx 995{,}45$ en dus wordt dit $(0; 995{,}45)$;
- het snijpunt met de x-as: $h(x) = 0$ als $200\sqrt{x+30} - 100 = 0$ en dus als $x+30 = 0{,}5^2 = 0{,}25$. Dit geeft $x = -29{,}75$ en dus als nulpunt $(-29{,}75; 0)$;
- asymptoten zijn er nu niet.



Figuur 4

Opgave 5

Bekijk de functie $g(x) = 200 - 50\sqrt{x+4}$.

a Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.

b Uit welke machtsfunctie van de vorm $y = x^p$ kan de grafiek van g door transformatie ontstaan? Welke transformaties moet je achtereenvolgens toepassen?

c Bepaal het domein en het bereik van g.

d Bereken de snijpunten van de grafiek van g met de beide coördinaatassen.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies f met $f(x) = 2x\sqrt{x} + 4$ en g met $g(x) = 2x\sqrt{x+4}$.

a Waarom is f wel een machtsfunctie en g niet?

b Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \geq g(x)$.

Voorbeeld 4

Los op: $40 - \sqrt[3]{x} < 24$.

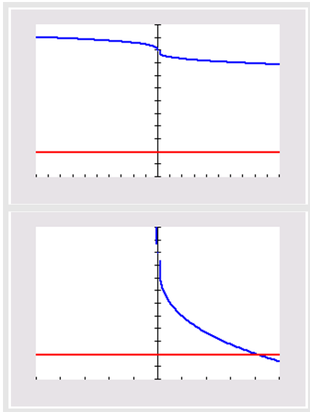
Antwoord

Voor het oplossen van een ongelijkheid is een grafiek handig.

De functie $y_1 = 40 - \sqrt[3]{x}$ is een machtsfunctie, want hij is te schrijven als $y_1 = -1x^{\frac{1}{3}} + 40$.

De functie ontstaat door transformatie van $y = x^{\frac{1}{3}}$:

- vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de x-as (spiegelen in de x-as);
- translatie van 40 eenheden ten opzichte van de x-as.



Figuur 5

De grafiek van $y = x^{\frac{1}{3}}$ komt goed in beeld met venster $[-10,10] \times [-4,4]$, dus die van y_1 komt goed in beeld met venster $[-10,10] \times [36,44]$. Omdat je $y_2 = 24$ ook in beeld wilt hebben, kies je $[-10,10] \times [20,44]$ (bovenste figuur).
Je ziet dat het snijpunt van beide grafieken niet in beeld komt; in de x-richting moet je veel grotere getallen instellen!
Dus kies je bijvoorbeeld als venster $[-5000,5000] \times [20,44]$.
Dan los je op: $40 - \sqrt[3]{x} = 24$.
Je vindt: $x = 16^3 = 4096$.
De oplossing van de ongelijkheid is $x > 4096$.

Opgave 7

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $200\sqrt{x - 40} \geq 50$

b $100 - 25\sqrt{2x + 6} < 20$

Opgave 8

Gegeven is de gebroken functie f met voorschrift $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.

a Laat zien dat $f(x) = 1 - \frac{2}{x+4}$.

b Laat zien dat f een machtsfunctie is.

c Welke asymptoten heeft de grafiek van f?
Welke limieten horen er bij?

d Geef het domein en het bereik van f.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = 40 - \frac{100}{(x+10)^3}$.

a Laat zien dat f een machtsfunctie is.

b Bepaal de asymptoten van de grafiek van f met de bijbehorende limieten.

c Geef het domein en het bereik van f.

d Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van f.

e Los op: $f(x) \geq x$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 10

Los de ongelijkheden exact op.

a $\frac{16}{x^4} \geq \frac{1}{2}x$

b $\frac{2x}{x-10} + 20 < 100$

Opgave 11

Gegeven is de functie g met $g(x) = 20x^2\sqrt{x} - 100$.

a Laat zien dat g een machtsfunctie is.

b Geef het domein en bereik van g.

c Bereken exact het nulpunt van de grafiek van g.

d Los op: $g(x) \geq x$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 12

Los de ongelijkheden exact op.

a $16x^{\frac{1}{4}} \geq \frac{1}{2}x$

b $2\sqrt{2x - 40} + 20 < 100$

Opgave 13

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = \frac{10}{x\sqrt{x}}$ en $g(x) = \frac{10x}{\sqrt{x}}$.

a Beide functies zijn machtsfuncties. Verklaar op grond van de exponent van deze machtsfuncties waarom de grafiek van f altijd dalend en die van g stijgend is.

b Welke asymptoten hebben deze functies?

c Los exact op: $f(x) \geq g(x)$.

Toepassen

Opgave 14: Parabool benaderen

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$.

a Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van f?

b Bepaal de coördinaten van de toppen van f.

c Licht toe waarom de grafiek van f de parabool $y = x^2$ benadert.

Testen

Opgave 15

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden exact op.

a $40 - \frac{5}{x^4} = 0$

b $\sqrt[3]{2x - 10} = 5$

c $\frac{2\sqrt{x}+100}{\sqrt{x}} > 12$

d $\frac{10}{(5-x)^4} \geq 0{,}016$

Opgave 16

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{4}{\sqrt{10-x}}$ en $g(x) = \sqrt{10 - x}$.

a Waarom zijn beide functies machtsfuncties?

b Geef het domein en bereik van beide functies.

c Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken van f en g.

d Los op: $f(x) \geq g(x)$

Practicum

Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden met wortelvormen en gebroken vormen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.