6.4 De abc-formule

Inleiding

In het vorige onderdeel heb je gezien hoe je de vergelijking $2(x-1)^2-5=3$ oplost door terug te rekenen. Dat terugrekenen lukt omdat de x maar op één plaats in de vergelijking voorkomt.
Kwadratische vergelijkingen komen ook voor in een vorm waarin terugrekenen niet mogelijk is. Werk je namelijk de haakjes weg, dan krijg je $2x^2-4x-3=3$.
De x komt nu op meer plekken voor en terugrekenen is niet meer mogelijk. Door kwadraatafsplitsen kun je ook een formule afleiden waarmee een dergelijke vergelijking in één keer op te lossen is. Dat is de zogenaamde abc-formule.

Je leert in dit onderwerp

- nagaan hoeveel oplossingen een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2+bx+c=0$ heeft;
- kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2+bx+c=0$ oplossen;
- kwadratische ongelijkheden oplossen.

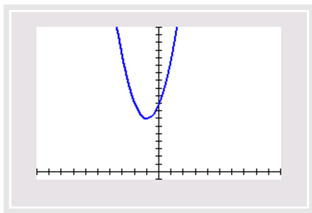
Voorkennis

- kwadratische vergelijkingen van de vorm $a(x-p)^2+q=u$ oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van de functie $g(x)=2(x+1)^2+7$.



Figuur 1

a Schrijf het functievoorschrift van g in de vorm $g(x)=ax^2+bx+c$.

b Hoe kun je met de grafische rekenmachine nagaan of je dit goed hebt gedaan?

c Hoe kun je aan een functievoorschrift van $g(x)=ax^2+bx+c$ zien of de grafiek een dal- of een bergparabool is?

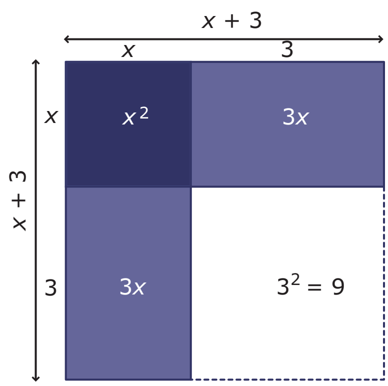
d Hoe bepaal je de top van de grafiek van g?

Bekijk vervolgens de grafiek van $f(x)=x^2+6x-8$.

e Hoe bepaal je algebraïsch de top en de nulpunten van de grafiek van f?

Uitleg 1

De vergelijking $x^2+6x=16$ kun je niet oplossen door terugrekenen. Maar in de figuur zie je dat $x^2+6x=(x+3)^2-3^2$. Dit betekent dat je de gegeven vergelijking kunt schrijven als: $(x+3)^2-9=16$.
En nu komt x weer op één plek voor en kun je terugrekenen:



Figuur 2

$$\begin{aligned}(x+3)^2-9 &= 16\\ (x+3)^2 &= 25\\ x+3 &= \pm 5\\ x &= -3\pm 5\end{aligned}$$

De oplossing van deze vergelijking is: $x=2 \vee x=-8$.

Je hebt hier gebruikgemaakt van de algemene formule:

$x^2+2kx=(x+k)^2-k^2$

De gebruikte techniek heet een kwadraat afsplitsen. De geldigheid van deze formule is eenvoudig aan te tonen door de haakjes weg te werken.

Opgave 1

Bekijk de kwadratische functie f met functievoorschrift $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

a Herleid f door een kwadraat af te splitsen.

b Je kunt nu de coördinaten van de top van de grafiek van f makkelijk bepalen. Welke coördinaten zijn dit?

c Bereken algebraïsch de nulpunten van de grafiek van f. Rond af op twee decimalen.

Opgave 2

Splits van de functievoorschriften een kwadraat af.

a $f(x) = x^2 + 12x$

b $g(x) = x^2 - 8x + 15$

c $h(x) = 2x^2 - 12x - 12$

d $k(x) = -x^2 + 4x + 3$

Uitleg 2

De techniek van kwadraat afsplitsen kun je ook toepassen om bijvoorbeeld de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op te lossen. Je deelt dan eerst door 3 en daarna splits je het kwadraat af. Omdat dit tijdrovend kan zijn, hebben wiskundigen de oplossingen berekend voor het algemene geval. Dat gaat ook met kwadraat afsplitsen. Je krijgt het volgende resultaat:

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossing:

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dit noem je de abc-formule of wortelformule. Deze formule geeft meteen de twee oplossingen als je de juiste waarden voor a, b en c invult. Deze formule kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen, maar de vergelijking moet vaak wel eerst nog in de vorm $ax^2+bx+c = 0$ worden gezet.

Ga na dat de oplossing van $3x^2 + 17x = 45$, en dus $3x^2 + 17x - 45 = 0$ is:

$$x = \frac{-17+\sqrt{829}}{6} \vee x = \frac{-17-\sqrt{829}}{6}$$

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ onder het wortelteken heet de discriminant. Omdat de discriminant in dit geval positief is, namelijk 829, zijn er twee mogelijke antwoorden. Is de discriminant negatief, dan zijn er geen reële oplossingen. Je kunt de discriminant beter eerst uitrekenen.

Opgave 3

Met de abc-formule kun je kwadratische vergelijkingen oplossen.

a Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met behulp van de abc-formule. Rond af op twee decimalen.

b Los de vergelijking $x^2 - 6x + 1 = 0$ op met behulp van de abc-formule.

c Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met kwadraat afsplitsen.

d Probeer de abc-formule af te leiden door de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ op te lossen met kwadraat afsplitsen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

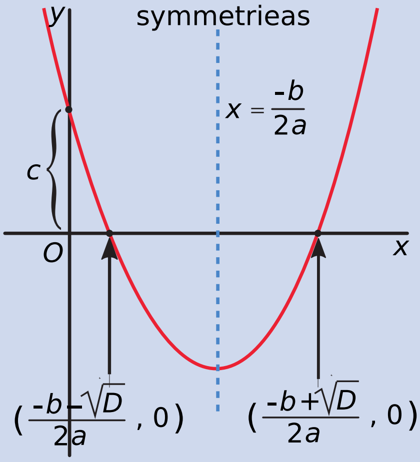
Een algemene vorm voor een **kwadratische functie** is:
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Aan het functievoorschrift zie je niet meteen hoe hij door transformatie uit de machtsfunctie $y = x^2$ kan ontstaan. Dat is lastig als je de top en de nulpunten van de bijbehorende parabool wilt vinden. Door **kwadraat afsplitsen** kun je de functie f omzetten naar de vorm:
$f(x) = a(x-p)^2 + q$

waarin (p,q) de top van de grafiek is. Je gebruikt daarbij de eigenschap:

$x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$

Controleer met haakjes wegwerken dat $f(x) = 2x^2 - 4x$ dezelfde functie is als $g(x) = 2(x-1)^2 - 2$.



Figuur 3

Het is handig als je $f(x) = ax^2 + bx + c$ met behulp van kwadraat afsplitsen omzet naar de vorm waarin je de top en de symmetrieas zo kunt aflezen.

Wiskundigen hebben al lang geleden de **abc-formule** afgeleid. Daarmee kun je de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen en zo de nulpunten van de kwadratische functie berekenen. De gevonden oplossing is:

$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Bewijs 1

Los $ax^2 + bx + c = 0$ in algemene zin op met behulp van kwadraat afsplitsen.

Neem aan dat $a \neq 0$ (anders is het ook geen kwadratische vergelijking). Je kunt dan aan beide zijden van het isgelijkteken delen door a. Dat geeft:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Kwadraat afsplitsen levert op:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ en $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Worteltrekken:

$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

En herleiden:

$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Hiermee is de abc-formule gevonden.

De uitdrukking $D = b^2 - 4ac$, die onder het wortelteken staat, heet de **discriminant** van de kwadratische vergelijking. Omdat alleen de wortel uit een positief getal of 0 een reëel getal oplevert, bepaalt die discriminant het aantal oplossingen van de vergelijking.

- Als $D > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $D = 0$ is er één oplossing.
- Als $D < 0$ zijn er geen reële oplossingen.

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op: $x^2 + 10x = 15$.

Antwoord

Terugrekenen kan niet, maar op $x^2 + 10x$ kun je kwadraat afsplitsen toepassen: $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$.

De vergelijking wordt dan zo opgelost:

$$\begin{aligned}(x+5)^2 - 25 &= 15 \\ (x+5)^2 &= 40 \\ x + 5 &= \pm\sqrt{40} \\ x &= -5 \pm \sqrt{40}\end{aligned}$$

Je kunt ook de abc-formule toepassen.

Eerst schrijf je de vergelijking als: $x^2 + 10x - 15 = 0$.

Dan neem je: $a = 1$, $b = 10$ en $c = -15$.

Discriminant: $D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15 = 160$.

De discriminant is positief, er zijn dus twee oplossingen:

$x = \frac{-10+\sqrt{160}}{2} \vee x = \frac{-10-\sqrt{160}}{2}$

Ga na dat beide oplossingsmethodes hetzelfde opleveren.

Opgave 4

Los de vergelijking $x^2 - 12x = 30$ op.

a Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.

b Doe dit vervolgens met de abc-formule.

c Los op: $x^2 - 12x \leq 30$.

Opgave 5

Je wilt de ongelijkheid $3x^2 + 6x < x + 8$ oplossen.

Daarvoor los je eerst de vergelijking $3x^2 + 6x = x + 8$ op.

Als je de abc-formule wilt gebruiken om deze vergelijking op te lossen, moet de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ staan.

a Schrijf de bij de ongelijkheid horende vergelijking $3x^2 + 6x = x + 8$ in deze vorm en bereken de oplossingen met de abc-formule.

b Controleer de oplossingen met de grafische rekenmachine en geef de oplossing van de ongelijkheid.

Opgave 6

Kwadratische vergelijkingen/ongelijkheden kunnen soms ook opgelost worden door ontbinden in factoren. Ga bij elk van de volgende vergelijkingen/ongelijkheden na of ze zo opgelost kunnen worden. Bereken van elk van de vergelijkingen de oplossing. Gebruik de abc-formule alleen als dat echt nodig is.

a $x^2 - x - 3 = 0$

b $-4x^2 + 5x - 14 = 0$

c $2x^2 - 10x + 10 < 2x - 6$

d $x - 5x^2 = 10$

e $x(x-7) > 8$

Voorbeeld 2

Bepaal algebraïsch de nulpunten en de top van de grafiek van de functie $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

Antwoord

Kwadraat afsplitsen:

$2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2) = 2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2}$

De nulpunten vind je uit: $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} = 0$.

Ga na dat je door terugrekenen vindt: (-1,0) en (2,0).

Je kunt ook meteen de vergelijking $2x^2 - 2x - 4 = 0$ oplossen. Dat kun je doen met behulp van de abc-formule, maar veel sneller door ontbinden in factoren toe te passen.

Ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt. Voordeel van het kwadraat afsplitsen is dat je ook meteen de top van de grafiek uit het functievoorschrift kunt aflezen.

De top is $\left(\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}\right)$.

Opgave 7

Bekijk de kwadratische functie $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$. Je wilt de nulpunten en de top van de grafiek van f bepalen.

a Bepaal de nulpunten en de top eerst met behulp van kwadraat afsplitsen. Rond af op twee decimalen.

b Je kunt de nulpunten ook meteen met de abc-formule berekenen. Bepaal wat a, b en c zijn. Bereken daarna de discriminant.

c Kun je aan de discriminant zien hoeveel oplossingen de vergelijking $f(x) = 0$ heeft?

d Los de vergelijking $f(x) = 0$ op en ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt als bij a.

e Werk je met de abc-formule, dan kun je vanuit de nulpunten de top bepalen. Hoe gaat dat in zijn werk?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Een kwadratische vergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant 0 is. Stel dat je een functie hebt zoals $f_k(x) = x^2 + kx + 3$, waarin k een nog onbekende constante is. Je wilt deze constante zo kiezen, dat de grafiek van f precies met zijn top op de x-as ligt.
Welke waarde moet k dan krijgen?

Antwoord

Kwadraat afsplitsen geeft:

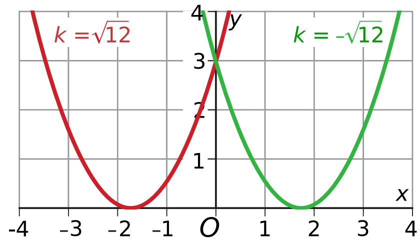
$f_k(x) = \left(x + \frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{4}k^2 + 3$

Top: $\left(-\frac{1}{2}k, -\frac{1}{4}k^2 + 3\right)$

Als de top op de x-as ligt, is $y_{top} = 0$.

Dit levert op: $-\frac{1}{4}k^2 + 3 = 0$ en dus $k^2 - 12 = 0$ zodat $k = \pm\sqrt{12}$.

Je had dit ook anders kunnen aanpakken, namelijk met behulp van de discriminant van de vergelijking $x^2 + kx + 3 = 0$. Ga na dat je hetzelfde vindt.



Figuur 4

Opgave 8

Het voorschrift $f_k(x) = x^2 + kx + 3$ levert voor verschillende waarden van k steeds een andere functie met een andere grafiek op.

a Bepaal de top van deze parabool als $k = 2$.

b Bepaal de top van deze parabool als $k = 1$.

In **Voorbeeld 3** wordt gevraagd om k zo te bepalen dat de top van de parabool op de x-as ligt. Dit betekent ook dat $x^2 + kx + 3 = 0$ precies één oplossing heeft.

c Laat zien dat de top op de x-as ligt als $k = -\sqrt{12} \vee k = \sqrt{12}$.

d Voor welke waarden van k ligt de top van de grafiek van f_k op de lijn $y = 1$?

e Als k varieert, lijkt de top van de parabool zelf ook een parabool te doorlopen. Stel een formule op voor die parabool.

Opgave 9

Gegeven is de functie f_p met $f_p(x) = px^2 - 4x + 5$.

a Neem $p = 1$ en bepaal de nulpunten en de top van de grafiek van f_1.

b Neem $p = 0$. Waarom is de grafiek van f_0 nu geen parabool?

c Voor welke waarde(n) van p heeft de grafiek van f_p precies één punt met de x-as gemeen?

d Laat zien dat de top van de grafiek van f_p op de lijn $y = -2x + 5$ ligt.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de kwadratische functie f met $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

a Schrijf het functievoorschrift in een zodanige vorm dat je de top van de grafiek kunt aflezen.

b Je kunt nu op drie manieren de nulpunten van de grafiek van f berekenen. Doe dit eerst door het functievoorschrift dat je bij a hebt gevonden te gebruiken.

c Bereken de nulpunten ook met behulp van de abc-formule.

d Ten slotte kun je gebruikmaken van ontbinden in factoren. Dat gaat verreweg het snelst als je de ontbinding ‘ziet’. Bereken de nulpunten nog eens op deze manier.

Opgave 11

Teken met de grafische rekenmachine in één figuur de grafieken van $f(x) = 2x^2 - x + 1$ en $g(x) = 10 - 3x$.

a Los exact op: $f(x) = g(x)$.

b Los op: $f(x) > g(x)$. Rond af op drie decimalen.

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $x^2 - 3x - 13 = 0$

b $\frac{1}{3}x^2 + 10x + 1 = 0$

c $2x^2 - 5x = x$

d $2x^2 - 12x = -18$

e $x^2 - 5x + 10 = 0$

Opgave 13

Los de ongelijkheden algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

a $-13x^2 + 10x + 8 \geq -8x^2 + 3x$

b $-2x^2 - x < -6$

c $0{,}5x - 4 > 0{,}25x^2 + 3x - 8$

Opgave 14

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = px^2 + 6x + 2p$ en $g(x) = 6 - x$.

a Neem $p = 2$ en bereken de nulpunten van f en de top van de grafiek van f.

b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f precies één punt met de x-as gemeen?

c Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f drie verschillende snijpunten met de assen?

d Voor welke waarden van p hebben de functies f en g precies één snijpunt?

Opgave 15

Gegeven is de kwadratische functie $f_p(x) = \frac{1}{8}x^2 + px - 1$. Als je de waarde van p varieert, dan verandert natuurlijk ook de plaats van de top.

De toppen lijken op een parabool te liggen. Stel de formule van deze parabool op.

Toepassen

Ook de vergelijking $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$ kun je opvatten als kwadratische vergelijking.

Dat komt omdat $x^4 = \left(x^2\right)^2$.

Je kunt de vergelijking daarom schrijven als $p^2 - 6p + 4 = 0$ waarin $p = x^2$.
Je kunt dan de twee waarden van p die hieraan voldoen vinden door kwadraat afsplitsen of met de abc-formule: $p = 3 \pm \sqrt{5}$. Dit betekent dan dan $x^2 = 3 - \sqrt{5} \vee x^2 = 3 + \sqrt{5}$. En hieruit kun je dan x berekenen.

Opgave 16

Bekijk bij **Toepassen** hoe je de oplossingstechnieken voor kwadratische vergelijkingen ook in sommige andere situaties kunt toepassen.

a Los zelf de vergelijking $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$ op.

b Los op: $x^6 + 4x^3 = 12$.

Ook de vergelijking $x - 4\sqrt{x} - 5 = 0$ kun je zo oplossen, want $x = (\sqrt{x})^2$.

c Laat zien, hoe dat gaat.

Opgave 17

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

a $3x^4 - 2x^2 = 5$

b $2x^3 - 5x^{1,5} - 4 = 0$

c $-x^{100} = -40x^{50} + 15$

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $x^2 - 2x - 15 = 0$

b $-x^2 - x - 1 = 0$

c $20 - x^2 = 11$

d $x(x+2) < 14$

e $x^2 - x + 10 \geq 3$

Opgave 19

Gegeven zijn de functies $f(x) = p - x^2$ en $g(x) = x^2 - 3x$. Hierin is p een nog onbekende constante.

a Voor welke waarden van p heeft functie f geen nulpunten?

b Neem $p = 4$ en bereken de snijpunten van de twee grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.

c Bepaal de coördinaten van de top van de grafiek van g.

d Voor welke waarde van p hebben beide grafieken precies één snijpunt?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van kwadratische vergelijkingen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.