# 6.3 Kwadratische functies

## Inleiding

Je gaat nu dieper in op de eigenschappen van machtsfuncties met een exponent 2, kwadraten dus. Kwadratische functies zijn functies waarvan de grafieken kunnen ontstaan door transformaties van de grafiek van $y = x^2$. De grafieken van kwadratische functies zijn parabolen. De eigenschappen van die kwadratische functies kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen en om formules bij gegeven parabolen op te stellen.

Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- de eigenschappen van een kwadratische functie afleiden uit het functievoorschrift;
- kwadratische vergelijkingen oplossen;
- een passend functievoorschrift opstellen bij een parabool die de grafiek is van een kwadratische functie.

### Voorkennis

- algebraïsch vergelijkingen oplossen;
- transformaties van functies toepassen.

## Verkennen

### Opgave V1

Je weet al van alles van kwadratische functies.

**a** Welke oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = 20$?

**b** Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -1$?

**c** Heeft de ongelijkheid $x^2 > -1$ oplossingen? Zo ja, welke?

**d** Heeft elke kwadratische vergelijking oplossingen? Hoeveel oplossingen kunnen er zijn?

**e** Wat weet je allemaal van een kwadratische functie? Maak een overzicht.

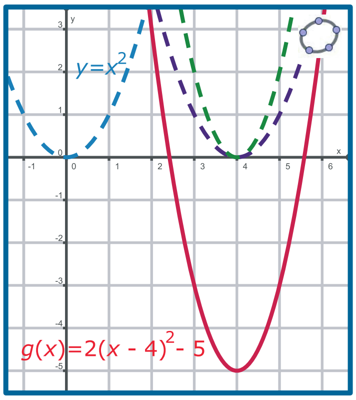
## Uitleg

**Bekijk de applet: Kwadratische functies.**

Kwadratische functies zijn de functie $f(x) = x^2$ en alle functies waarvan de grafiek door de bekende transformaties uit die van $f$ verkregen kan worden. Ze hebben daarom de vorm $g(x) = a(x-p)^2 + q$.

Kies bijvoorbeeld $a = 2$, $p = 4$ en $q = -5$, dan krijg je de functie met voorschrift $g(x) = 2(x-4)^2 - 5$, waarvan de grafiek uit $f$ verkregen kan worden door:

- een translatie van 4 ten opzichte van de $y$-as;
- vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de $x$-as;
- een translatie van -5 ten opzichte van de $x$-as.




Figuur 2

De grafiek van $g$ is een dalparabool met top $(4, -5)$ en symmetrieas $x = 4$. De twee nulpunten bereken je door de vergelijking $2(x - 4)^2 - 5 = 0$ op te lossen.

Neem je $a = -2$, dan wordt het functievoorschrift $h(x) = -2(x - 4)^2 - 5$. De grafiek van $h$ is dan een bergparabool, omdat vermenigvuldiging van een functievoorschrift met een negatief getal een spiegeling van de grafiek in de $x$-as betekent.

## Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 4$.

**a** Door welke transformaties kan de grafiek van $f$ uit die van $y = x^2$ ontstaan?

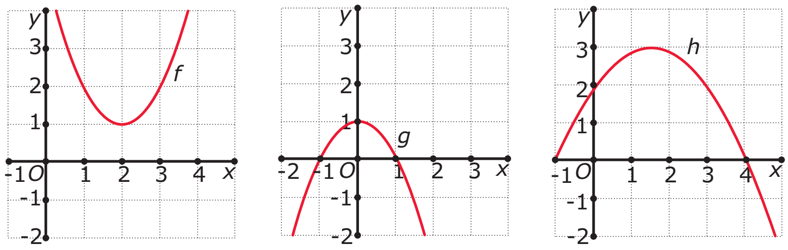
**b** Geef het domein en het bereik van $f$.

**c** Is bij functie $f$ sprake van een minimum of een maximum? Hoe kun je dat aan het functievoorschrift zien?

**d** Los exact op: $f(x) < 100$.

## Opgave 2

Bekijk de parabolen. Geef het bijbehorende functievoorschrift.




Figuur 3

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

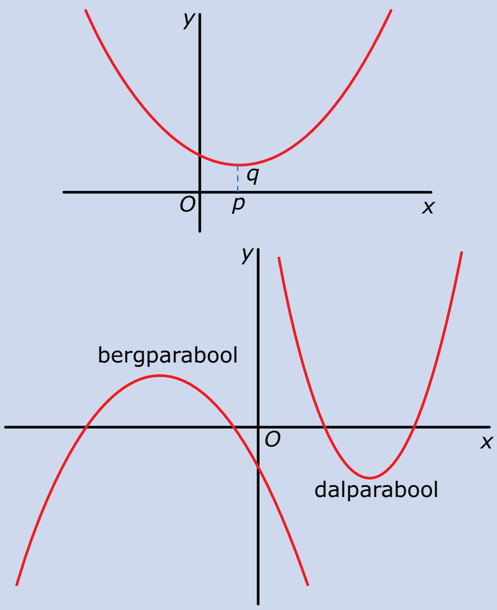
**Bekijk de applet: Kwadratische functies.**

Een functie van de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$, noem je een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De grafiek van elke kwadratische functie ontstaat door een transformatie van de grafiek van $y = x^2$. De grafiek van elke kwadratische functie is een **parabool** met **top** $(p,q)$ en **symmetrieas** $x = p$. Als $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool**. Als $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.

De **kwadratische vergelijking** $a(x - p)^2 + q = u$ kun je herleiden tot $(x - p)^2 = c$.

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.

Je vindt de oplossingen door worteltrekken.




Figuur 4

## Voorbeeld 1

**Bekijk de applet.**

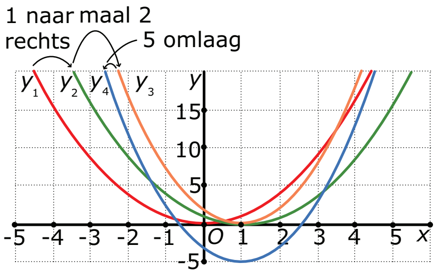
Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$.
Hoe kan de grafiek van $f$ ontstaan uit die van $y = x^2$? Bepaal ook de top en de symmetrieas van de grafiek van $f$.

Antwoord

Ga na dat de grafiek wordt verkregen door op de grafiek van $y = x^2$ toe te passen:

- een translatie van 1 ten opzichte van de $y$-as;
- een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de $x$-as;
- een translatie van -5 ten opzichte van de $x$-as.

De grafiek is een dalparabool met top $(1, -5)$. De coördinaten van die top zijn direct uit het functievoorschrift af te lezen. De symmetrieas is de lijn $x = 1$.




Figuur 5

## Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$.

**a** Door welke transformaties kan de grafiek van $f$ uit die van $y = x^2$ ontstaan?

**b** Geef het domein en het bereik van $f$.

**c** Bepaal de uiterste waarde van $f$.

**d** Los op: $f(x) > 100$. Rond af op één decimaal.

## Opgave 4

Als je de grafiek van $y = x^2$ transleert en ten opzichte van de $x$-as vermenigvuldigt, krijg je weer een parabool als grafiek. Hiervan is het functievoorschrift als volgt te schrijven: $f(x) = a(x-p)^2 + q$.

**a** Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is? Geeft dit ook aan of de grafiek een maximum of minimum heeft?

**b** Hoe kun je aan het functievoorschrift zien hoe groot het maximum of minimum is?

**c** Hoe kun je aan het functievoorschrift zien welke waarde van $x$ je in moet vullen om het maximum of minimum te krijgen?

**d** Geef het domein en het bereik van deze functie.

## Voorbeeld 2

Los de ongelijkheid $-5(x+3)^2 - 17 \geq -47$ op.

Antwoord

Eerst los je de bijbehorende vergelijking systematisch op:

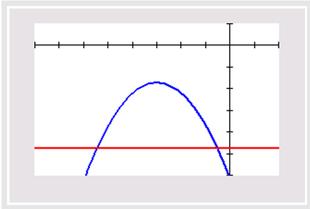
$$\begin{aligned} -5(x+3)^2 - 17 &= -47 \\ -5(x+3)^2 &= -30 \\ (x+3)^2 &= 6 \\ x+3 &= \pm\sqrt{6} \\ x &= -3 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

Je vindt de twee oplossingen: $x = -3 - \sqrt{6} \vee x = -3 + \sqrt{6}$.

Je ziet ook aan de grafiek van $f$ dat de vergelijking $-5(x+3)^2 - 17 = -10$ geen oplossingen heeft. En dat de vergelijking $-5(x+3)^2 - 17 = -17$ precies één oplossing heeft, namelijk $x = -3$.

Bekijk de grafieken van $y_1 = -5(x+3)^2 - 17$ en $y_1 = -47$ om de ongelijkheid op te lossen.

Uit de grafiek lees je af dat $-3 - \sqrt{6} \leq x \leq -3 + \sqrt{6}$.



Figuur 6

## Opgave 5

Los de vergelijkingen exact op.

**a** $x^2 = 100$

**b** $(x-4)^2 = 64$

**c** $-3(x+1)^2 = -75$

**d** $3(x+2)^2 - 3 = 27$

**e** $2x^2 - 7 = 0$

## Opgave 6

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

**a** $(x-4)^2 < 10$

**b** $-2(x+3)^2 + 10 < 4$

**c** $3(x-5)^2 - 2 \geq 10$

## Voorbeeld 3

De nulpunten van de kwadratische functie $f$ zijn (2,0) en (4,0). Het snijpunt met de $y$-as is (0,6). Welk functievoorschrift heeft deze functie?

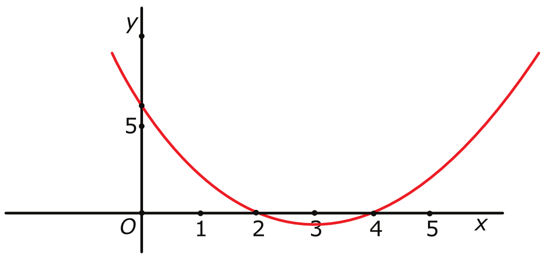
Antwoord

De grafiek van $f$ is een parabool waarvan de symmetrieas een verticale lijn door (3,0) is. Dus is $f(x) = a(x-3)^2 + q$.

De grafiek gaat door het punt (0,6), dus $f(0) = 6$ en $9a + q = 6$. De grafiek gaat ook door het punt (2,0), dus $f(2) = 0$ en $a + q = 0$.

Uit $a + q = 0$ volgt $q = -a$. Vul je dit in de andere vergelijking in, dan vind je: $9a - a = 6$. En dus: $a = 0{,}75$. Omdat $q = -a$ is $q = -0{,}75$.

Het functievoorschrift is: $f(x) = 0{,}75(x-3)^2 - 0{,}75$.




Figuur 7

## Opgave 7

Stel een voorschrift op van de kwadratische functie $f$ waarvan de grafiek de assen in de punten (-2,0), (0,2) en (4,0) snijdt.

## Verwerken

### Opgave 8

De grafiek van de functie $f(x) = 2(x+8)^2 - 8$ ontstaat door transformatie van de grafiek van $y = x^2$.

**a** Welke transformaties moet je dan toepassen?

**b** Verander de volgorde van de laatste twee transformaties en teken de grafiek van de functie $g$ die zo ontstaat. Waarom is de volgorde van die transformatie dus belangrijk?

### Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = -2(x+4)^2 + 5$.

**a** Geef het maximum, of het minimum van $f$ en de waarde van $x$ waarvoor je deze extreme waarde krijgt.

**b** Los de vergelijking $-2(x+4)^2 + 5 = -5$ exact op.

**c** Los exact op: $f(x) = 5$.

**d** Los exact op: $f(x) = -10$.

**e** Los exact op: $f(x) > -3$.

**f** Los exact op: $f(x) < 0$.

**g** Los exact op: $f(x) < 20$.

### Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = -3(x+2)^2 + 10$.

**a** Op welk interval is deze functie dalend?

**b** Is de functie op de rest van het domein dus stijgend?

**c** Bereken exact de nulpunten van $f$.

### Opgave 11

Los de ongelijkheden exact op.

**a** $5(x-1)^2 - 9 > 4$

**b** $5 - x^2 > -21$

**c** $3(x-1)^2 < 40$

**d** $-4(x+80)^2 - 40 < -100$

### Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}(x-5)^2 + c$. Hierin is $c$ een nog onbekende constante.

**a** Welke extreme waarde heeft deze functie $f$?

**b** Voor welke waarden van $c$ heeft de functie $f$ twee nulpunten? Licht je antwoord toe.

**c** Voor welke waarden van $c$ heeft de functie $f$ geen snijpunten met de lijn $y = 1$?

**d** Voor welke waarden van $c$ ligt de top van de grafiek van $f$ op de lijn $y = 2x - 1$?

### Opgave 13

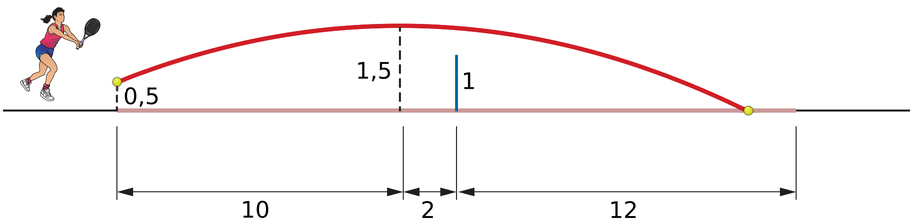
De grafiek van een kwadratische functie $f$ gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(2,5)$.

De lijn $x = 4$ snijdt de grafiek van $f$ in de top.

Stel het functievoorschrift op van $f$.

## Toepassen

**Bekijk de applet: Baan van een tennisbal.**




Figuur 8

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) **parabolische baan** ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, dat ongeveer 24 meter bedraagt.
Je kunt door berekening aantonen dat de bal 'in' is.
Breng daartoe een geschikt assenstelsel aan zoals dat in de figuur is te zien en stel een bijpassende kwadratische formule op voor de baan van de bal.

### Opgave 14

De baan van een tennisbal kan worden beschreven met een kwadratische functie.

**a** De baan is slechts ongeveer parabolisch. Waarom is hij in de praktijk zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?

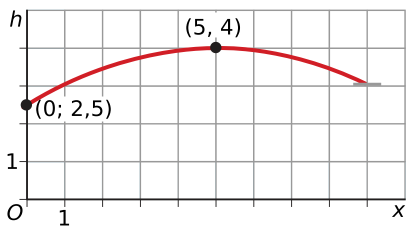
**b** Omdat de parabool door het punt $(0;0{,}5)$ gaat, kun je de baan beschrijven met de formule $h(x)=a(x-10)^2+1{,}5$. Licht dit toe.

**c** Laat zien dat $a=-0{,}01$.

**d** Bereken nu de twee nulpunten van de kwadratische functie die de baan van de tennisbal (ongeveer) beschrijft. Laat zien dat de bal inderdaad 'in' is.

### Opgave 15

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool, zie de figuur. Het hoogste punt van de baan is gegeven. De speler laat de bal op 2,5 meter boven de grond los.




Figuur 9

**a** Stel een formule op voor de functie $h(x)$ die de baan van de bal beschrijft.

**b** De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond. Hoe ver staat de speler van (het midden van) de ring van de basket in cm nauwkeurig?

## Testen

### Opgave 16

Bepaal bij de volgende functies de top van de grafiek en het type parabool.

**a** $f(x)=-2x^2-2$

**b** $g(x)=100(x-4)^2+8$

**c** $h(x)=-(x+5)^2$

## Opgave 17

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Laat eventuele wortels staan.

**a** $3(x-5)^2-5=-2$

**b** $3(x-5)^2-5=-5$

**c** $-2(x+4)^2+3=1$

**d** $2(x+2)^2>10$

**e** $-(x+4)^2<-3$

**f** $(x+4)^2-5<-3$

## Opgave 18

Stel een voorschrift op van de kwadratische functie $f$ waarvan de nulpunten $x=10$ en $x=20$ zijn. Verder is gegeven dat $f(0)=30$.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.