6.2 Machtsfuncties

Inleiding

Bij functies van de vorm $f(x) = x^p$ hangt het verloop van de functie af van de waarde van p. Voor bijvoorbeeld $p = 2$ krijg je een kwadratische functie met als grafiek een parabool. Deze functie is dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$.
Voor $p = 1$ krijg je een lineaire functie, die stijgend is voor elke waarde van x.
In dit onderdeel zul je zien dat voor negatieve en gebroken waarden van p je machtsfuncties krijgt met weer een ander karakter.

Je leert in dit onderwerp

- het verband tussen de waarde van p en het verloop van de grafiek van $f(x) = x^p$ kennen;
- het verloop van functies die door transformaties van $f(x) = x^p$ ontstaan;
- vergelijkingen en ongelijkheden van machtsfuncties algebraïsch oplossen.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen met machten oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Machtsfuncties hebben de vorm $f(x) = c \cdot x^p$. Je kunt de bijbehorende grafieken bekijken met de grafische rekenmachine. Je kiest dan voor c en voor p getallen. Neem voor het gemak steeds $c = 1$ en neem voor p een geheel getal.

a Voor welke waarden van p hebben deze machtsfuncties een minimum?

Wat zijn daar de coördinaten van?

b Zijn er machtsfuncties die overal op hun domein stijgend zijn?

Zo ja, geef dan een paar voorbeelden.

c Hoe kun je er voor zorgen dat de machtsfunctie $f(x) = x^p$ dalend is voor positieve waarden van x?

Neem nu ook gebroken getallen voor p.

d Welke verschillen zijn er tussen de grafiek bij $p = \frac{1}{2}$ en die bij $p = \frac{1}{3}$?

e Bekijk de grafiek bij $p = \frac{2}{3}$. Wat is er bij $x = 0$ aan de hand?

f Als p een niet geheel decimaal getal is, mag je alleen positieve waarden voor x toelaten. Waarom zou dat zijn?

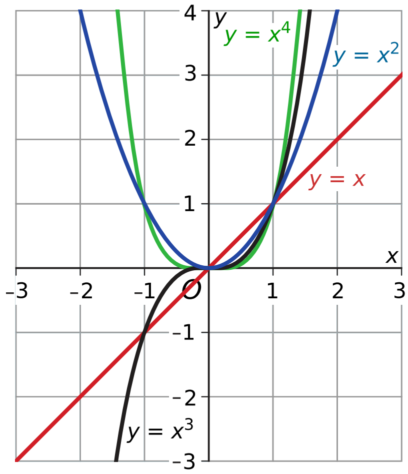
Uitleg 1

Bekijk de applet: Machtsfuncties.

Bekijk de grafieken van $f(x) = x^p$ voor enkele positieve gehele waarden van p.

Merk op:

- Als p een positief even getal is, geldt dat:
  - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek dalend is als $x < 0$ en stijgend als $x > 0$;
  - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$, één oplossing heeft als $a = 0$ en geen oplossingen heeft als $a < 0$.
- Als p een positief oneven getal is, geldt dat:
  - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$;
  - de grafiek stijgend is voor elke waarde van x (behalve 0);
  - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a.



Figuur 1

Opgave 1

Plot de grafieken van de functies $f(x) = x^4$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$ en $j(x) = x$.

a Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = g(x)$?

b Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > g(x)$?

c Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = h(x)$?

d Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > h(x)$?

e Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = j(x)$?

f Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > j(x)$?

Om de voorgaande vragen in het algemeen te kunnen beantwoorden, kijk je naar twee functies: $f(x) = x^p$ en $g(x) = x^q$, waarbij p een even positief getal is en q een oneven positief getal.

g Neem de tabel over en vul hem in. Gebruik de grafische rekenmachine.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$p < q$				
$p > q$			$f(x) < g(x)$	

Tabel 1

Opgave 2

Bekijk de functies $k(x) = x^5$ en $l(x) = x^6$.

a Maak een schets van de grafieken van $k(x)$ en $l(x)$. Geef ook punt (1,1) aan. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

b Voor welke waarden van x geldt $x^6 = 10$? Los op: $x^6 < 10$. Rond af op twee decimalen.

c Voor welke waarde van x geldt $x^5 = 10$? Los op: $x^5 > 10$. Rond af op twee decimalen.

Uitleg 2

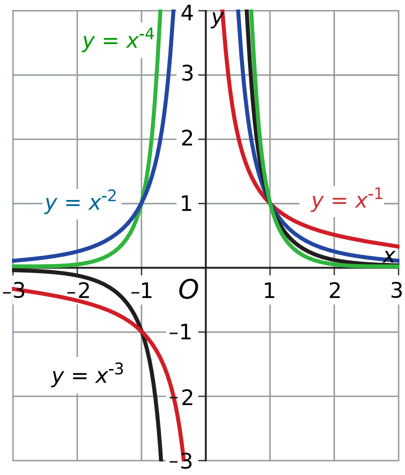
Bekijk de applet: Machtsfuncties.

Bekijk de grafieken van $f(x) = x^p$ voor enkele negatieve gehele waarden van p.

Merk op:

- Als p een negatief even getal is, geldt dat:
  - $D_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek stijgend is als $x < 0$ en dalend als $x > 0$;
  - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$ en geen oplossingen heeft als $a \leq 0$.
- Als p een negatief oneven getal is, geldt dat:
  - $D_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek dalend is voor elke waarde van x (behalve 0);
  - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a behalve $a = 0$.

Nu is $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.



Figuur 2

Bij functies van de vorm $f(x) = c \cdot x^{-n} = \frac{c}{x^n}$ is $f(x)$ recht evenredig met x^{-n} en omgekeerd evenredig met x^n. Deze functies hebben duidelijk twee asymptoten. Je ziet dat $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ en $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, zodat de horizontale asymptoot steeds $y = 0$ is. En verder dat $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$, terwijl $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$ als n even is en $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ als n oneven is. De verticale asymptoot is $x = 0$.

Opgave 3

Maak met je grafische rekenmachine grafieken van de functies: $k(x) = x^{-1}$ en $l(x) = x^{-2}$.

a Welke asymptoten hebben deze functies? En welke limieten horen hier bij?

b Voor welke waarden van x geldt $k(x) = l(x)$?

c Los op: $k(x) < l(x)$.

d Los de volgende vergelijkingen op:

- $x^{-1} = 0{,}005$ en $x^{-2} = 0{,}005$
- $x^{-1} = 5000$ en $x^{-2} = 5000$

e Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} < 0{,}005$?

f Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} > 5000$?

g Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} < 0{,}005$?

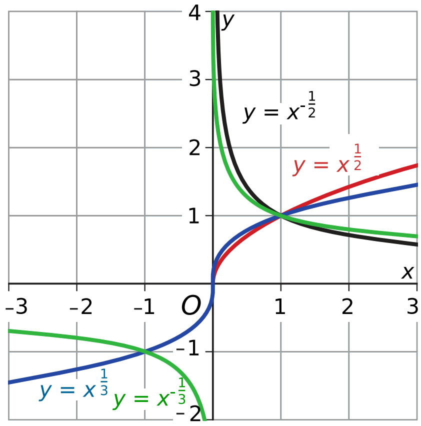
h Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} > 5000$?

Uitleg 3

Bekijk de applet

Bekijk de grafieken van $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$ voor enkele gehele waarden van p.

- Als $p > 1$ en p is even geldt dat:
  - $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
  - de grafiek door (0,0) en (1,1) gaat;
  - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a \geq 0$.
- Als $p > 1$ en p is oneven geldt dat:
  - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$;
  - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
  - de grafiek door (0,0), (1,1) en (-1,-1) gaat;
  - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft voor alle waarden van a.



Figuur 3

Bekijk de applet

- Als $p < -1$ en p is even geldt dat:
  - $D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
  - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
  - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a > 0$.
- Als $p < -1$ en p is oneven geldt dat:
  - $D_f = \langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = \langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
  - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
  - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a \neq 0$.

Kijk nog eens goed of de grafische rekenmachine dezelfde grafieken geeft. Er kunnen verschillen zijn. Merk ook op dat de grafiek in de buurt van $x = 0$ niet altijd helemaal netjes wordt gemaakt.

Opgave 4

Maak met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies $a(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $b(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $c(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ en $d(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

a Voor welke waarden van x geldt $a(x) < b(x)$?

b Voor welke waarden van x geldt $d(x) < b(x)$?

c Voor welke waarden van x geldt $d(x) < c(x)$?

d Maak de grafiek van $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$.
Controleer je schets met de applet of de grafische rekenmachine.

e Voor welke waarden van x geldt $x^{\frac{1}{4}} > 4$?

Theorie en voorbeelden

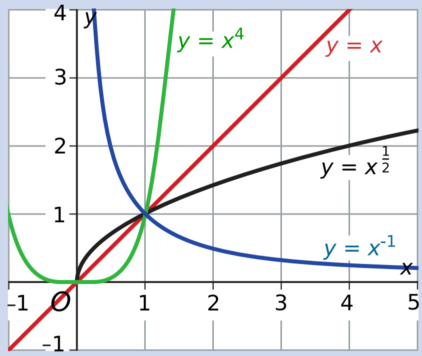
Om te onthouden

Bekijk de applet

Bekijk enkele grafieken van de **machtsfunctie** $f(x) = x^p$ voor enkele verschillende waarden van p.

Eigenschappen voor $x > 0$ zijn:

- $p > 1$: de grafiek gaat door de punten (0,0) en (1,1) en stijgt steeds sneller;
- $p = 1$: f is een lineaire functie door de punten (0,0) en (1,1);
- $0 < p < 1$: de grafiek gaat door de punten (0,0) en (1,1) en stijgt steeds langzamer;
- $p < 0$: de functie is niet gedefinieerd voor $x = 0$, de grafiek gaat door het punt (1,1) en daalt steeds langzamer, de x-as en de y-as zijn asymptoten van de grafiek.



Figuur 4

Voor $x < 0$ bestaat de functie alleen als p een geheel getal is of als p een breuk is met een oneven noemer, zoals $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$.

Afhankelijk van het even of oneven zijn van p is de grafiek daar dalend of stijgend.

De vergelijking $x^p = a$ heeft één oplossing als p (ongelijk 0) een oneven geheel getal is.
Als p een even geheel getal (ongelijk 0) is en $a > 0$ zijn er twee oplossingen.
Als p een even geheel getal (ongelijk 0) is en $a < 0$ zijn er geen oplossingen.

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op: $-20x^{\frac{5}{4}} > -7$.

Antwoord

Los op: $-20x^{\frac{5}{4}} = -7$.

Je vindt: $x = \left(\frac{7}{20}\right)^{\frac{4}{5}} \approx 0{,}43$.

Maak de grafiek van $y = -20x^{\frac{5}{4}}$ op de grafische rekenmachine. Merk op dat het domein van de functie $[0, \rightarrow\rangle$ is. De vergelijking heeft inderdaad maar één oplossing. Nu lees je de (benaderde) oplossing van de (tweede) ongelijkheid uit de grafiek af: $0 \leq x < 0{,}43$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de ongelijkheid $-20x^{\frac{5}{4}} > -7$ oplost .

a Los de vergelijking $-20x^{\frac{5}{4}} = -7$ algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

b In het voorbeeld wordt daarbij een macht met exponent $\frac{4}{5}$ gebruikt.

Licht die stap toe. Heb je dat zelf ook gedaan?

c Los op dezelfde manier algebraïsch op $-180x^{\frac{7}{6}} > -30$.
Rond af op drie decimalen.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{5}(x+4)^3 + 6$.

Los algebraïsch op: $f(x) = 30$.

Antwoord

Functie f kan door transformatie ontstaan uit de machtsfunctie $y_1 = x^3$.

$$\begin{array}{rcll} y & = & x^3 & \\ & & & \text{translatie van -4 ten opzichte van de } y\text{-as} \\ y & = & (x+4)^3 & \\ & & & \text{vermenigvuldiging met } -\frac{1}{5} \text{ ten opzichte van de } x\text{-as} \\ y & = & -\frac{1}{5}(x+4)^3 & \\ & & & \text{translatie van 6 ten opzichte van de } x\text{-as} \\ y & = & -\frac{1}{5}(x+4)^3 + 6 & \end{array}$$

Om $f(x) = 30$ algebraïsch op te lossen, moet je stap voor stap terugrekenen:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{5}(x+4)^3 + 6 &= 30 \\ -\tfrac{1}{5}(x+4)^3 &= 24 \\ (x+4)^3 &= -120 \\ x+4 &= (-120)^{\frac{1}{3}} \\ x &= (-120)^{\frac{1}{3}} - 4 \end{aligned}$$

Je vindt $x = \sqrt[3]{-120} - 4 \approx -8{,}93$.

Opgave 6

Bekijk de functie $f(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^3 - 5$.

a Beschrijf in de juiste volgorde welke transformaties er nodig zijn vanuit $y = x^3$ om tot de functie $f(x)$ te komen. Geef elke keer aan wat er met de grafiek gebeurt als je deze transformatie toepast.

b Los exact op: $f(x) > -10$.

Voorbeeld 3

Los algebraïsch op: $\frac{6}{x^4} > 4$.

Antwoord

Volgens de eigenschappen van machten en exponenten geldt: $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$.

Er is daarom sprake van een machtsfunctie: $f(x) = \frac{6}{x^4} = 6 \cdot \frac{1}{x^4} = 6x^{-4}$.

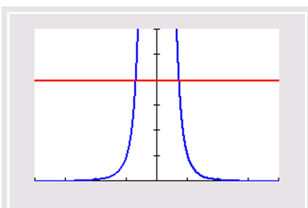
Maak de grafiek van f en de lijn $y_2 = 4$ op de grafische rekenmachine.

Los nu op: $6x^{-4} = 4$.

Oplossing: $x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{4}} \vee x = -\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$, dus $x \approx -1{,}11 \vee x \approx 1{,}11$.

In de grafiek is de oplossing van de ongelijkheid af te lezen: $-1{,}11 < x < 0 \vee 0 < x < 1{,}11$.

Merk op dat je $x = 0$ uitzondert, omdat voor deze waarde de functie f niet gedefinieerd is.



Figuur 5

Opgave 7

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine. Houd rekening met het domein van de verschillende functies.

a $x^2 < \sqrt{x}$

b $\frac{1}{x^4} = 81$

c $\frac{1}{x^3} < 27$

d $\frac{5}{x^3} < 30$

e $x^5 < x^4$

f $x^6 < x^4$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x+1)^{-2} - 4$.

a Welke asymptoten heeft de grafiek van $y = x^{-2}$? En welke limieten horen daarbij?

b Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren op de grafiek van $y = x^{-2}$ om die van f te krijgen.

c Welke asymptoten heeft de grafiek van $f(x)$? Welke limieten horen daarbij?

d Geef het domein en het bereik van f.

e Los exact op: $f(x) < 10$.

Verwerken

Opgave 9

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de commerciële afdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{750}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro's.

a Je ziet dat a omgekeerd evenredig is met p. Schrijf de formule zo, dat a recht evenredig is met een macht van p.

b Teken de grafiek met de grafische rekenmachine voor de prijs tussen € 1,00 en € 5,00 per kg. Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de afzet dan meer of minder dan de helft?

c Het bedrijf heeft een voorraad van 550 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.

d Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

Opgave 10

Van een rechthoek is de lengte x en de breedte y, beide in cm. De oppervlakte is 24 cm^2.

a Leg uit dat y omgekeerd evenredig is met x.

b Leg uit dat y recht evenredig is met een macht van x en geef de bijbehorende formule.

c Voor welke waarden van x geldt: $y \geq 10$?

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}} + 5$.

a Leg uit hoe de grafiek van deze functie kan ontstaan door transformaties op de grafiek van $y = x^{-\frac{1}{2}}$ toe te passen.

b Geef het domein en het bereik van f.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq 10$.

Opgave 12

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = -5 + 2\sqrt{x-3}$ en $g(x) = \sqrt{x}$ op de grafische rekenmachine.

a Schrijf f en g als machtsfunctie en beschrijf hoe de grafiek van $f(x)$ vanuit die van $g(x)$ kan ontstaan.

b Geef het domein en het bereik van zowel f als g.

c Los algebraïsch op: $f(x) \geq 100$.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{100}{(x-10)^2} + 25$.

a Laat zien hoe de grafiek van deze functie kan ontstaan uit een machtsfunctie.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van f? Welke limieten horen daarbij?

c Geef het domein en het bereik van f.

d Los algebraïsch op: $f(x) \leq 50$.

Opgave 14

Een functie die door transformatie uit een machtsfunctie ontstaat, is: $h(x) = a(x-b)^c + d$.

a Voor welke gehele waarden van c heeft de functie een maximum of een minimum?

b Waar hangt het vanaf of het een maximum of minimum is?

c Hoe kun je uit deze formule aflezen waar de top zich bevindt?
Geef de coördinaten van deze top.

Toepassen

Opgave 15: De formule van Kleiber

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (in L) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (in kg), dus $Z = c \cdot m^p$. In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens. Kleiber heeft hiermee het verband $Z = 0{,}7m^{0{,}75}$ gevonden. Maak nu bij het opstellen van een formule voor Z afhankelijk van m gebruik van de gegevens van de muis en het paard.

soort	m(kg)	Z(L)
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 2

a Laat zien hoe je de formule van Kleiber kunt vinden.

b Stel de formule op uitgaande van de gegevens van de rat en de mens. Vind je dezelfde formule?

c Bereken met de formule van Kleiber het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg.

Opgave 16: Energieverbruik van zoogdieren

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur. Hoe zwaarder een zoogdier is, hoe meer energie het kost om de lichaamstemperatuur constant te houden. Het gewicht G (gram) is recht evenredig met een macht van de energie P (joule) die per minuut nodig is om de lichaamstemperatuur constant te houden. Je ziet een tabel met een aantal waarden voor G en P.

G	1000	2000	5000	15000
P	3,02	5,08	10,11	23,04

Tabel 3

a Stel een formule op waarin je P uitdrukt in G.

b Hoeveel energie P per minuut heeft een mens van 70 kg nodig? Rond af op twee decimalen.

c Wat gebeurt er met P als G twee keer zo groot wordt?

Testen

Opgave 17

Gegeven is de machtsfunctie $y = 2 \cdot x^{\frac{1}{4}}$.

a Wat is het domein en wat is het bereik van deze functie?

b Heeft deze functie een maximum of een minimum?

c Heeft de grafiek van deze functie een asymptoot?

d Los exact op: $2x^{\frac{1}{4}} \leq 10$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = -2 + \frac{15}{(x+2)^2}$. Beschrijf in de juiste volgorde welke transformaties er nodig zijn om vanuit $y = x^{-2}$ tot de functie $f(x)$ te komen.

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $2(x+4)^4 - 10 = 500$

b $10 - 2\sqrt{x-4} > 6$

c $\sqrt[4]{x} < 20$

d $2(x+1)^3 > 100$

e $5 + 2\sqrt{x-3} < 20$

Practicum: Machtsfuncties

Met deze applet maak je machtsfuncties. Verzin zo'n functie, bedenk eerst hoe hij kan ontstaan uit $y = x^p$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

Bekijk de applet: Machtsfunctie