6.1 Machten

Inleiding

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$. Dit is een voorbeeld van een zogenaamd machtsverband, want de variabele h moet tot de macht 0,5 worden verheven. Je kunt ook zeggen dat h een machtsfunctie is van a. Je maakt in dit onderdeel met machtsfuncties kennis.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat een machtsverband en een machtsfunctie is;
- bij een machtsverband heen en terug te rekenen;
- hoe bij een machtsverband de verandering van de éne variabele samenhangt met die van de andere.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.

Verkennen

Opgave V1

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$.

Figuur 2

Geef van de volgende beweringen aan of ze waar zijn of niet, en geef een uitleg.

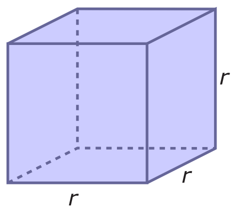
a Als je op een toren van 100 m hoog staat kun je meer dan 30 km ver kijken.

b Als je op een toren van 50 m hoog staat kun je niet verder dan (afgerond) 18 km kijken.

c Op een hoogte van 100 m kun je twee keer zo ver kijken als op een hoogte van 50 m.

Uitleg

De inhoud I van een kubus met ribben van lengte r is: $I = r \cdot r \cdot r = r^3$. Dit is een typisch voorbeeld van een machtsfunctie: de variabele r moet tot de derde macht worden verheven om een functiewaarde te vinden.



Figuur 3

Als $r = 5$, dan is $I = 5^3 = 125$.

Al in de Oudheid vroegen de Grieken zich af hoe groot de ribbe is van een kubus die een inhoud heeft die precies het dubbele is van de gegeven inhoud. In ons geval: “Hoe groot is de ribbe van een kubus met een inhoud van 250?”

De oplossing van deze vraag is zowel eenvoudig als heel erg moeilijk.

Je weet dat $(r^3)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \cdot \frac{1}{3}} = r^1 = r$.

Je kunt daarom van r^3 terugrekenen naar r door de omgekeerde macht te gebruiken: Als $r^3 = 250$ dan is $r = 250^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{250} \approx 6{,}30$.

De benadering van 6,30 kun je gemakkelijk met de rekenmachine krijgen, iets wat vroeger natuurlijk niet kon. Maar de rekenmachine zal altijd een benadering geven, want $\sqrt[3]{250}$ kun je niet als breuk schrijven.

Kijk je naar de massa van de kubus, dan moet je rekening houden met de soortelijke massa. Dat is de massa in kilogram van 1 dm^3. De soortelijke massa van bijvoorbeeld een massief ijzeren kubus is 7,87 kg. De massa m is dan recht evenredig met de inhoud I: $m = 7{,}87 \cdot I$. Voor de massa van deze kubus geldt daarom: $m = 7{,}87 \cdot r^3$, waarin r is uitgedrukt in dm.

Dit is opnieuw een voorbeeld van een machtsfunctie: m is recht evenredig met een macht van r.

Opgave 1

De formule voor de inhoud I van een kubus is $I = r^3$, waarbij r de lengte van een ribbe is.

a Bereken de inhoud van een kubus waarvan de ribbe 4 cm is.

b Maak de ribbe twee keer zo groot. Wat gebeurt er met de inhoud?

c Bereken hoe groot je de ribbe moet nemen om een kubus te krijgen met een inhoud van 500 cm^3. Rond af op één decimaal.

De soortelijke massa van marmer is 2,7 g/cm^3.

d Licht toe dat de massa m van een kubus van marmer recht evenredig is met een macht van de ribbe r. Geef de bijbehorende formule.

Opgave 2

Ook het verband tussen de ribbe r en de oppervlakte A van een kubus is een machtsverband. De bijbehorende formule is: $A = 6r^2$.

a Is A recht evenredig met de tweede macht van r, of is r recht evenredig met de tweede macht van A?

b Bereken de oppervlakte van een kubus met een ribbe van 4 cm.

c Bereken hoe groot je de ribbe moet nemen om een kubus te krijgen met een oppervlakte van 300 cm^2. Rond af op één decimaal.

d Hoeveel keer zo groot moet de ribbe worden om een kubus te krijgen met een viermaal zo grote oppervlakte?

e Druk r uit in A.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

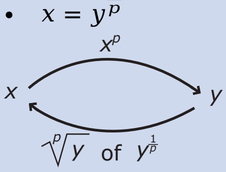
Bekijk de applet.

Als y **recht evenredig met een macht** van x is, dus $y = c \cdot x^p$, dan spreek je van een **machtsfunctie**. De constante c is de **evenredigheidsconstante**.

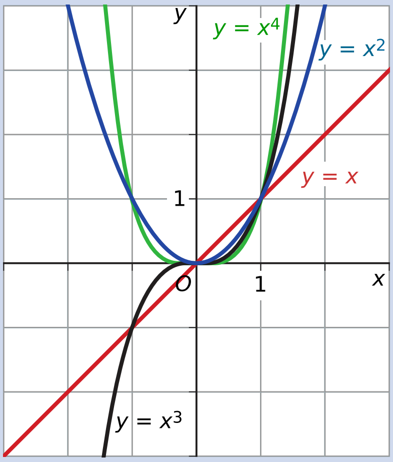
Bekijk de voorbeelden van grafieken van machtsfuncties. Daarbij is p steeds een positief getal of 0 en $c = 1$.

Vanuit de machtsfunctie $y = x^p$ (dus als $c = 1$) kun je op twee manieren terugrekenen:

- $x = \sqrt[p]{y}$
- $x = y^{\frac{1}{p}}$



Figuur 5



Figuur 4

Als de evenredigheidsconstante niet de waarde 1 heeft, begin je met door c te delen. Daarna pas je of de p-demachtswortel toe, of je werkt met de omgekeerde macht. Afhankelijk van de waarde van p zijn er één of twee mogelijke uitkomsten.

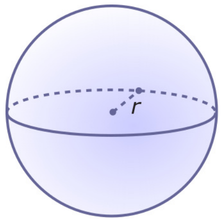
Voor elke x en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende

eigenschappen van machten en exponenten		
$x^0 = 1$	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ mits $x \neq 0$	$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ mits $x \geq 0$ en $a > 0$
$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$	$x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$ mits $x \neq 0$	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Tabel 1

Voorbeeld 1

De inhoud van een bol is recht evenredig met de derdemacht van de straal: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$



Figuur 6

Hoe groot is de straal van een bol met een inhoud van $I = 1000 \text{ cm}^3$?

Antwoord

Daarvoor moet je de vergelijking $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 1000$ oplossen.

En dus: $r^3 = 238{,}73...$
Je vindt: $r = \sqrt[3]{238{,}73...} \approx 6{,}2$ cm.

Of zo: $r = (238{,}73...)^{\frac{1}{3}} \approx 6{,}2$ cm.

Je kunt ook eerst de formule voor de inhoud van een bol omrekenen, zodat de straal wordt uitgedrukt in de inhoud:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 &= I \\ r^3 &= \frac{3}{4\pi} \cdot I \\ r &= \left(\frac{3}{4\pi} \cdot I\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Je vindt: $r \approx 0{,}62 \cdot I^{\frac{1}{3}}$, dus r is recht evenredig met $I^{\frac{1}{3}}$.

En zo is $r \approx 0{,}62 \cdot 1000^{\frac{1}{3}} \approx 6{,}2$ cm.

Opgave 3

De formule voor de inhoud van een bol is $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, met straal r in cm.

a I is recht evenredig met r^3.
Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b r is recht evenredig met $I^{\frac{1}{3}}$.
Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

Opgave 4

Bij welke van de formules is y recht evenredig met een macht van x? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante.

a $y = 2x$

b $y = 2x^4 + 5$

c $y = 5x^4$

d $x = 5y^4$

Opgave 5

Van een cilinder met straal r en hoogte h is het volume V:

$V = \pi r^2 h$

Neem aan dat $h = 2r$ en dat zowel straal als hoogte in cm zijn uitgedrukt.

a Laat zien dat in dit geval V recht evenredig is met r.
Bepaal de evenredigheidsconstante.

b Bereken de straal van zo'n cilinder als het volume 1000 cm^3 is.
Doe dit zowel met je grafische rekenmachine als algebraïsch.

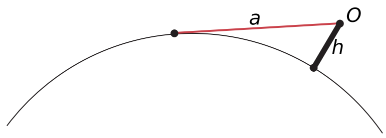
Je kunt de formule van V als functie van r herleiden tot een formule voor r als functie van V.

c Laat zien, hoe dat gaat.
Bereken met die formule de straal bij een volume van 1000 cm^3.

Voorbeeld 2

In een vlak landschap is er een verband tussen hoe ver je kunt kijken en hoe hoog je ogen zich boven het landschap bevinden. Voor de kijkafstand a (meter) als functie van de hoogte h (meter) geldt:

$a = 3572 \cdot h^{\frac{1}{2}}$.



Figuur 7

Omdat $h^{\frac{1}{2}} = \sqrt{h}$ kun je deze formule ook schrijven als $a = 3572 \cdot \sqrt{h}$.
Je kunt bij deze machtsfunctie bij een gegeven waarde van h de bijbehorende waarde van a berekenen en omgekeerd. Laat dat met voorbeelden zien.

Antwoord

Bijvoorbeeld bij $h = 30$ geldt $a = 3572 \cdot 30^{\frac{1}{2}} = 3572 \cdot \sqrt{30} \approx 19564$.

Neem je omgekeerd een kijkafstand van 20 km, dus $a = 20000$, dan geldt:

$$\begin{aligned} 3572 \cdot h^{\frac{1}{2}} &= 20000 \\ &\qquad \text{links en rechts delen door 3572} \\ h^{\frac{1}{2}} &= \frac{20000}{3572} \\ &\qquad \text{links en rechts kwadrateren} \\ h &= \left(\frac{20000}{3572}\right)^2 \end{aligned}$$

Er geldt: $h = \left(\frac{20000}{3572}\right)^2 \approx 31{,}3$ m.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** de formule voor de kijkafstand.

a Bereken in meters nauwkeurig hoe ver je kunt kijken vanaf een toren van 50 m hoog.

Op een eiland wordt een vuurtoren gebouwd. De toren wordt zo hoog gemaakt dat je bij helder weer 25 km ver kunt kijken.

b Bepaal de hoogte van de toren op de volgende manieren:

- Aflezen uit de grafiek: $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$.
- In de formule $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$ de variabele a vervangen door 25000; de vergelijking die je dan krijgt, moet je oplossen door hem stapsgewijs te vereenvoudigen.
- Berekenen met de formule: $h = \left(\frac{a}{3572}\right)^2$.

Voorbeeld 3

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huid-oppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun inhoud, zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Meeh vond de formule: $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$

Hierin is H de huidoppervlakte (dm^2) en G het gewicht (kg) van het dier.

Je ziet dat de huidoppervlakte recht evenredig is met de $\frac{2}{3}$-de macht van het lichaamsgewicht. De factor c is de evenredigheidsconstante en verschilt per diersoort. In de biologie wordt deze evenre-digheidsconstante de Meeh-coëfficiënt genoemd.

In de tabel zie je een vijftal waarden van G en H van Schotse hooglanders, een soort koeien. Bepaal de Meeh-coëfficiënt van de Schotse hooglander.

G	430	450	490	500	420
H	507	523	553	560	500

Tabel 2

Antwoord

Breid de tabel uit met een rij voor $G^{\frac{2}{3}}$ en een rij voor $\frac{H}{G^{\frac{2}{3}}}$.

Als het goed is, vind je in de laatste rij steeds (ongeveer) hetzelfde getal, namelijk 8,9. Dit is de gevraagde Meeh-coëfficiënt. Voor de Schotse hooglander geldt $H = 8{,}9 \cdot G^{\frac{2}{3}}$.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3** het verband tussen huidoppervlakte (dm^2) en lichaamsgewicht (kg) van die-ren.

a De tabel geeft het verband weer tussen het lichaamsgewicht en huidoppervlakte van Schotse Hoog-landers. Laat door berekening zien dat hiervoor de constante c geldt: $c \approx 8{,}9$.

b De huid van een bepaalde Schotse Hooglander heeft een oppervlakte van ongeveer 510 dm^2. Hoe zwaar is dit dier?

c Als je de formule $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$ omrekent zodat het lichaamsgewicht uitgedrukt wordt in de huidoppervlakte, wat wordt dan de evenredigheidsconstante?

d Als het lichaamsgewicht twee keer zo groot wordt, wordt de huidoppervlakte dan meer of minder dan twee keer zo groot?

Opgave 8

Ook voor een massieve bol beschrijft de formule van Meeh het verband tussen de oppervlakte A en het gewicht G. Ga uit van een massieve ijzeren bol. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Zoek de formules voor de inhoud van een bol met straal r en de formule voor de oppervlakte van zo'n bol op.

b Welke formule geldt voor het gewicht G als functie van de straal r van de bol? Neem r in cm en G in grammen.

c Door de formules voor het gewicht en de oppervlakte van een bol met straal r te combineren, vind je $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de machtsfunctie $f(x) = 105x^6$.

a Bereken $f(3)$.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 15000$? Rond af op twee decimalen.

c Als de waarde van x vijf keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 10

Er is een verband tussen de snelheid s (km/h) van een auto en de bijbehorende remweg r (m). De remweg is de afstand die de auto nog aflegt als je zo hard mogelijk remt. Een vuistregel voor dit verband is (bij droog weer en goede banden): $r = \frac{s^2}{100} \cdot 0{,}75$.

a r is recht evenredig met een macht van s. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b In een weg zit een scherpe bocht waarin je maar 10 meter vooruit kunt kijken. Een eis voor veilig rijden is dat je moet kunnen stoppen binnen de afstand die je kunt overzien. Wat is volgens deze vuistregel de maximumsnelheid in deze bocht?

c Geef de formule waarmee de snelheid wordt uitgedrukt in de remweg.

d “Bij een snelheid van 60 km per uur is je remweg vier keer zo groot als bij een snelheid van 30 km per uur.”
Klopt deze uitspraak? Licht je antwoord toe met een berekening.

Opgave 11

Deze opgave gaat over de inhoud I van een kubus met ribben r in centimeters.

a Bereken de inhoud van een kubus met $r = 2$.

b Bereken de inhoud van een kubus met $r = 6$.

c De ribbe van de tweede kubus is drie keer zo groot als de ribbe van de eerste kubus. Wat betekent dit voor de inhoud van de kubus?

d Een kubus heeft een inhoud van 50 cm^3. Bereken r. Rond af op één decimaal.

e Geef de formule waarmee je de inhoud I uitdrukt in r.

f Geef de formule waarmee je de lengte r van de ribbe uitdrukt in inhoud I.

Opgave 12

Een formule voor de oppervlakte A van een kubus met ribbe r is: $A = 6r^2$.

a Licht toe hoe je deze formule kunt afleiden.

b Bereken de oppervlakte van een kubus met ribben van 3 cm en van een kubus met ribben van 6 cm.

c Wat gebeurt er met de oppervlakte als je de ribben twee keer zo groot maakt?

d Van een kubus is de oppervlakte 500 cm^2.
Bereken de lengte van de ribben. Rond af op twee decimalen.

e Geef een formule waarmee je de ribbe r uitdrukt in de oppervlakte A.

Opgave 13

Ga uit van een massieve ijzeren kubus met ribbe r (cm). De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Stel een formule op voor het gewicht G van de kubus als functie van r.

b Stel een formule op voor de oppervlakte A van de kubus als functie van r.

c Leid een formule af van de vorm $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de evenredigheidsconstante c. Rond af op twee decimalen.

d Bereken het gewicht van zo'n kubus in grammen als de totale buitenoppervlakte 150 cm^2 is.

Toepassen

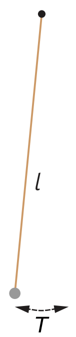
Als je een gewichtje laat slingeren aan een koord met een verwaarloosbare massa, ontstaat er een zuivere slingerbeweging. De slingertijd (of periode) is de tijd waarin de slinger een complete slingerbeweging uitvoert. Daarin beweegt het gewichtje bijvoorbeeld van links naar rechts en weer terug. Als de uitwijking van de slingerbeweging niet te groot is, dan geldt voor de **slingertijd** bij benadering de formule:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hierin is T de slingertijd in seconden, l de lengte van het koord in meters en g de valversnelling in m/s^2. Op aarde is de valversnelling gemiddeld ongeveer 9,81 m/s^2.

Omdat $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ kun je de formule ook schrijven als $T = 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Je kunt bij deze machtsfunctie bij een gegeven waarde van l de bijbehorende waarde van T berekenen en omgekeerd.



Figuur 8

Opgave 14

Bekijk de formule van de slingertijd van een zuivere slingerbeweging.

a Bereken de slingertijd bij een koordlengte van 70 cm. Rond af op één decimaal.

b Als je een zwaarder gewichtje aan het koord hangt terwijl de lengte van het koord hetzelfde blijft, zal de slingertijd niet veranderen. Leg uit hoe je dit aan de formule kunt zien.

De slingertijd van een gewicht aan een koord is 1,9 seconde.

c Bepaal de lengte van het koord op de volgende manieren:

- Met behulp van de grafische rekenmachine en de grafiek van $T = 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}}$.
- In de formule $T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ de variabele T vervangen door 1,9 en de vergelijking die je dan krijgt oplossen door hem stapsgewijs te vereenvoudigen.

Opgave 15

Bekijk nogmaals de formule van de slingertijd van een zuivere slingerbeweging.

Je kunt de gegeven formule herleiden tot een vorm waarin l is uitgedrukt in T.

a Laat dat zien en bereken met behulp van deze formule de lengte van een slinger met een slingertijd van 2,5 seconden. Rond af op twee decimalen.

b Geef de formule waarmee je T^2 uitdrukt in l.

Is T^2 recht evenredig met l? Zo ja, hoe groot is dan de evenredigheidsconstante?

Testen

Opgave 16

Gegeven is de machtsfunctie f met formule $y = 5 \cdot (3x)^4$.

a y is recht evenredig met een macht van x. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b Voor welke waarden van x is $f(x) = 12000$? Rond af op twee decimalen.

c Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 17

Het volume van een cilinder kun je berekenen met de formule $V = \pi r^2 h$. Hierin is r de straal van het grondvlak en h de hoogte van de cilinder, beide in cm. Je wilt blikken maken die even hoog als breed zijn, dus waarvan $h = 2r$.

a Welke formule geldt bij deze blikken voor V als functie van r?

b Herschrijf deze formule tot een formule waarin r recht evenredig is met een macht van V. Bepaal de evenredigheidsconstante. Rond af op twee cijfers achter de komma.

c De oppervlakte van zo'n blik bestaat uit een rechthoek en twee cirkels. Leid een formule af voor de oppervlakte A als functie van r.

d Laat zien dat tussen A en V een machtsverband bestaat van de vorm $A = c \cdot V^{\frac{2}{3}}$.

Bepaal de waarde van c. Rond af op twee cijfers achter de komma.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.