5.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Logaritmische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan.
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- logaritme — grondtal
- definitieformules — eigenschappen van logaritmen
- logaritmische schaal
- logaritmische functie
- logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden

Activiteitenlijst

- logaritmen gebruiken om exponentiële vergelijkingen op te lossen
- definitieformules en eigenschappen van logaritmen gebruiken — vergelijkingen met logaritmen oplossen
- werken met logaritmische schalen — functievoorschrift bepalen van exponentiële functie op enkellogaritmisch papier
- de karakteristieken van een logaritmische functie bepalen
- logaritmische vergelijkingen/ongelijkheden oplossen

Achtergronden

In 1614 verscheen 'Mirifici logarithmorum canonis descriptio' van **sir John Napier (1550—1617)**. Hierin staat de eerste beschrijving van logaritmen. In het voorwoord legt Napier uit dat zijn doel was het vinden van een eenvoudige manier om grote getallen te vermenigvuldigen, te delen, te kwadrateren en er wortels uit te trekken. Hij voerde een bepaalde handeling op die grote getallen uit waardoor hij er getallen van maakte waarmee hij door eenvoudig optellen en aftrekken hetzelfde resultaat verkreeg als andere door lastige vermenigvuldigingen en delingen. Die handeling (een functie zou je nu zeggen) noemde hij 'logaritme nemen' ('logos arithmos' is 'verhouding van getallen'). Een voorbeeld:

Figuur 1

Stel je wilt $a \cdot b = 1296 \cdot 63508$ berekenen.
Je neemt van beide getallen de logaritme (grondtal 10): $\log(1296) = 3{,}112605\ldots$ en $\log(63508) = 4{,}8028284$.
Nu gebruik je de rekenregel: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.
Dus is $\log(a \cdot b) = 3{,}112605 + 4{,}8028284 = 7{,}95433$.
Nu werk je die logaritme weer weg en je vind het antwoord 82306368.

Je ziet hoe Napier van een vervelende vermenigvuldiging $1296 \cdot 63.508$ een gemakkelijke optelling maakte!
In de tijd dat er geen elektronische rekenmachines waren, was dit een enorm belangrijke stap vooruit. Napiers logaritmen hadden trouwens nog niet het grondtal 10 (zoals in het voorbeeld), dat laatste is het werk van **Henry Briggs (1561—1630)**. Hij las in 1615 de Latijnse versie van Napiers geschrift en was er meteen van onder de indruk. Hij suggereerde Napier zijn logaritme zo aan te passen, dat $\log 1 = 0$ en het grondtal 10 is. Ze werden het eens en Briggs maakte een tabel voor logaritmen van getallen gebaseerd op grondtal 10.

Testen

Opgave 1

Los algebraïsch op.

a ${}^{\frac{1}{3}}\log(x+2) = -2$

b ${}^{2}\log(x) = 5 - {}^{2}\log(10)$

c ${}^{5}\log\left(4x^2\right) = 2 + {}^{5}\log(x)$

d $10 + 5 \cdot {}^{2}\log(x-5) \leq 100$

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x+10) + 4$ en $g(x) = \log(-x)$.

a Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de vergelijking van de asymptoot en schrijf de bijbehorende limieten op.

b Bepaal van beide functies algebraïsch het nulpunt.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq g(x)$.

d Gegeven is de functie $h(x) = f(x) + g(x)$.
Toon aan dat $h(x) = \log\left(-100000x - 10000x^2\right)$.

Opgave 3

Iemand verwacht dat de komende jaren aandelen 11% per jaar in waarde zullen stijgen.

a Hoelang duurt het dan totdat de waarde van de aandelen 1,5 keer zo groot is geworden?

b Iemand koopt voor € 2000,00 aandelen. Bereken na hoeveel jaar dit bedrag is verdubbeld. Bereken ook na hoeveel jaar het bedrag is verdrievoudigd en na hoeveel jaar het is verzesvoudigd. Laat zien hoe hiermee de eigenschap ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$ toegelicht kan worden.

Opgave 4

Een doorzichtige kunststof absorbeert per cm 27% van het licht dat er doorheen valt.

Bereken in mm nauwkeurig hoe dik de kunststof moet zijn om 50% van het licht te absorberen.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar (mbar) hangt af van de hoogte h (km) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt:

$h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

a Neem aan dat $p_0 = 1010$ mbar. Maak de grafiek van h als functie van p.

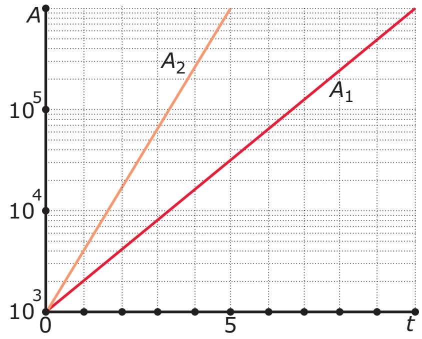
b In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 mbar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 mbar. Hoe hoog vliegt dat vliegtuig?

c Verklaar waarom de grafiek van h met $p_0 = 930$ mbar ontstaat door de grafiek bij a in verticale richting te verschuiven.

d De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 mbar op zeeniveau en berekent dat ze op 3 km hoogte vliegen. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 mbar. Hoe hoog vliegen ze in werkelijkheid? Geef je antwoord in meters nauwkeurig.

Opgave 6

In een laboratorium is onderzocht hoe de toename van het aantal bacteriën in 10 g salade afhankelijk is van de temperatuur. In de figuur staan de resultaten bij een temperatuur van 0 °C en bij een temperatuur van 4 °C.



Figuur 2

a Van hoeveel bacteriën is bij het onderzoek uitgegaan?

b Geef zowel voor A_1 als A_2 de formule van het aantal bacteriën A na t dagen. Rond hierbij af op twee decimalen.

c Vergelijk het aantal bacteriën na tien dagen bij 4 °C met het aantal na tien dagen bij 0 °C. Hoeveel keer zo veel bacteriën zijn er bij 4 °C?

d Hoeveel bedraagt de verdubbelingstijd bij 4 °C? Geef je antwoord in uren.

Volgens de onderzoekers is er bij de toename van het aantal bacteriën als functie van de temperatuur sprake van toenemende stijging. Voor temperaturen boven 0 °C geldt: wordt de temperatuur a keer zo groot, dan wordt de verdubbelingstijd a^2 keer zo klein.

e Geef de verdubbelingstijd van de bacteriecultuur bij 6 °C. Doe dat ook bij 10 °C.

Toepassen

Opgave 7: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip ‘zuurgraad’ gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $\left[H_3O^+\right]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $\left[H_3O^+\right] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7}: $\text{pH} = -\log\left(10^{-7}\right) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: $\text{pH} = -\log\left[H_3\,O^+\right]$.

a Bij geconcentreerd zwavelzuur is $\left[H_3O^+\right] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

b Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van 11,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie in mol/L?

c Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie van zure regen?

d Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

e De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijk pH van de huid is ongeveer 5,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie dan?

Opgave 8: De C-14 methode

In levende organismen komt behalve het radioactieve koolstof C-14 ook het niet-radioactieve C-12 voor. Gelukkig is de verhouding van de hoeveelheid C-14 ten opzichte van C-12 zeer klein. Deze verhouding is constant $1 : 10^{12}$. Wanneer een organisme sterft verandert de verhouding door radioactief verval van C-14. Door de verhouding te meten kan de ouderdom van resten organisch materiaal berekend worden. De halveringstijd van C-14 is 5730 jaar.

a Een archeoloog vindt een bot waarvan de verhouding C-14 : C-12 gelijk is aan $1 : 10^{13}$. Hoeveel jaar is dat bot ongeveer oud?

b Bij een Egyptische mummie blijkt de verhouding van C-14 en C-12 ongeveer 0,65 keer de verhouding van C-14 en C-12 in levende organismen te zijn. Benader de ouderdom van deze mummie.

c In 1947 zijn aan de westzijde van de Dode Zee de Dode-Zeerollen (oudtestamentische handschriften) gevonden. De verhouding van C-14 en C-12 in de perkamenten rollen bleek tussen de 77% en de 81% van die bij levende organismen te zijn. Vanaf hoeveel jaar voor het begin van de jaartelling tot hoeveel jaar erna zijn de Dode-Zeerollen geschreven?

d Een 4500 jaar oude kist werd in een hunebed (grafkelder in de provincie Drenthe) aangetroffen. Hoe groot is de verhouding van de aangetroffen hoeveelheid C-14 en C-12 ongeveer in vergelijking met die van een houten kist uit onze tijd?

Opgave 9: De wet van Fechner-Weber

De wet van Fechner-Weber (naar de negentiende eeuwse Duitse fysiologen G.Th. Fechner en E.H. Weber) luidt: 'Gevoelsindrukken die gelijke verhouding hebben, komen op onze zintuigen over alsof ze gelijke verschillen hebben.'
Onderzoek heeft aangetoond dat een persoon het verschil in geluidsdrukniveau tussen bijvoorbeeld 2 W/m^2 en 20 W/m^2 op dezelfde wijze ervaart als het verschil tussen 20 W/m^2 en 200 W/m^2. Toch is het verschil $20 - 2$ veel kleiner dan het verschil $200 - 20$. Dat is de reden dat men bij het toekennen van getalswaarden aan het geluidsdrukniveau in dB de logaritme gebruikt.

Het verband tussen het geluidsdrukniveau L en de effectieve geluidsdruk p wordt gegeven door $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$.

Hierin is $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.

a Toon aan dat daardoor het verschil in dB bij geluidsdrukniveau van 2 W/m^2 en van 20 W/m^2 gelijk is aan het verschil in dB bij geluidsdrukniveau van 20 W/m^2 en 200 W/m^2.

b Laat zien, dat de effectieve geluidsdruk p (in W/m^2) een exponentiële functie van het geluidsdrukniveau L (in dB) is.

Bij een normaal gesprek is het geluidsdrukniveau 50 dB. Het werken met een drilboor heeft een geluidsdrukniveau van 125 dB. Iemand zegt dat het geluid van een drilboor 2,5 keer zo hard is als dat van een gewoon gesprek.

c Welk bezwaar kun je tegen deze bewering hebben?

Examen

Opgave 10: Touchscreens

Bij het ontwerpen van touchscreens (aanraakschermen) voor moderne media als tablets en mobiele telefoons besteedt men veel aandacht aan het gebruiksgemak. Gebruikers willen immers snel kunnen navigeren. Bekijk de afbeelding van een touchscreen met een menu dat bestaat uit dertien knoppen. De tijd die je nodig hebt om in een menu de juiste knop te vinden, hangt mede af van het aantal knoppen in het menu. Volgens de psycholoog Hick kun je deze benodigde tijd T berekenen met de formule:

$T = b \cdot {}^2\log(n + 1)$

Hierbij is T de tijd in seconden, n het aantal knoppen in het menu en b een positieve constante die afhangt van de behendigheid van de gebruiker.

Figuur 3

a Om de juiste knop te vinden op het touchscreen van de foto heeft Irene 8 seconden nodig. Bereken met de formule van Hick haar waarde van b in één decimaal.

Pim is veel handiger met een touchscreen dan zijn vader. Hij kan in een menu met 16 knoppen even snel de juiste knop vinden als zijn vader in een menu met 4 knoppen. Dit betekent dat zijn b-waarde (b_p) kleiner is dan de b-waarde van zijn vader (b_v).

b Onderzoek of dit betekent dat de b-waarde van Pim precies half zo groot is als die van zijn vader.

Sommige gebruikers vinden een menu met veel knoppen onoverzichtelijk. Daarom deelt men een menu soms op in submenu's met minder knoppen. Als er bijvoorbeeld in totaal achttien knoppen zijn, kan de ontwerper ervoor kiezen om:

- methode I: één menu van achttien knoppen te maken
- methode II: een menu met drie knoppen te maken, waarbij na elk van de drie mogelijke keuzes weer een submenu met zes knoppen verschijnt.

De gebruiker wint hiermee overzichtelijkheid, want hij weet nu precies in welk submenu hij moet zoeken, maar hij verliest tijd doordat hij twee keer (in een menu) de juiste knop moet zien te vinden. Als $b = 0{,}9$ duurt het keuzeproces bij methode II minstens 0,5 seconden langer dan bij methode I.

c Toon met behulp van de formule voor T aan dat dit juist is.

Uit de formule van Hick volgt dat één menu met alle knoppen altijd sneller werkt dan een opdeling in submenu's. Dus één menu met $p \cdot q$ knoppen is altijd sneller dan een hoofdmenu met p knoppen, gevolgd door p submenu's met elk q knoppen.

d Neem $b = 1$ en toon aan dat deze bewering klopt.

(naar: vwo wiskunde A examen 2014, tweede tijdvak)

Opgave 11: Windsnelheid

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

Tabel 1

a Bereken a en b met behulp van de gegevens in de tabel. Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

Onderzoek door weerkundigen naar windsnelheden op verschillende hoogtes en onder verschillende omstandigheden heeft opgeleverd dat het verband tussen windsnelheid en hoogte in het algemeen niet lineair is. Een betere formule is:

$$W = 5{,}76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{h}{r}\right)$$

Hierin is:

- W de windsnelheid (in m/s);
- h de hoogte in meter waarop de windsnelheid wordt gemeten;
- m een constante die afhangt van de wrijving tussen de luchtlagen;
- r een constante die afhangt van de ruwheid van het terrein (hoge bomen beïnvloeden de windsnelheid anders dan grasland)

De formule is geldig tot hoogtes van ongeveer 100 meter.
In de praktijk wordt de windsnelheid op een hoogte van 10 meter gemeten. De waarde van r op de meetplek is bekend zodat het getal m met behulp van de formule berekend kan worden. Vervolgens kan met de gegeven formule de windsnelheid op andere hoogtes berekend worden.

b Boven open bouwland met $r = 0{,}12$ wordt de windsnelheid gemeten. Op 10 meter hoogte is deze windsnelheid 6,0 m/s. Bereken in deze situatie de windsnelheid op een hoogte van 60 meter.

Boven een bepaald terrein en met $m = 0{,}45$ geldt het volgende: de windsnelheid is op 60 meter hoogte 1,3 keer zo groot als op 20 meter hoogte.

c Bereken de waarde van r van dit terrein.

(bron: examen wiskunde B havo 2006, eerste tijdvak)

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.