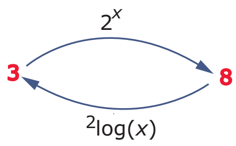
5.5 Logaritmische vergelijkingen

Inleiding

Onder andere bij het berekenen van nulpunten van functies ben je al vergelijkingen tegengekomen waarin logaritmen voorkomen. Uit de definitie volgt dat je vanuit een logaritme kunt terugrekenen door een exponentiële functie met hetzelfde grondtal te gebruiken. Hiermee kun je vergelijkingen met logaritmen oplossen. Soms gebruik je er ook de eigenschappen van logaritmen bij.
Bij ongelijkheden moet je ook nog rekening houden met het domein van de logaritme!



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- systematisch vergelijkingen met logaritmen op te lossen;
- ongelijkheden met logaritmische functies op te lossen.

Voorkennis

- werken met logaritmische functies;
- de eigenschappen van logaritmen gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

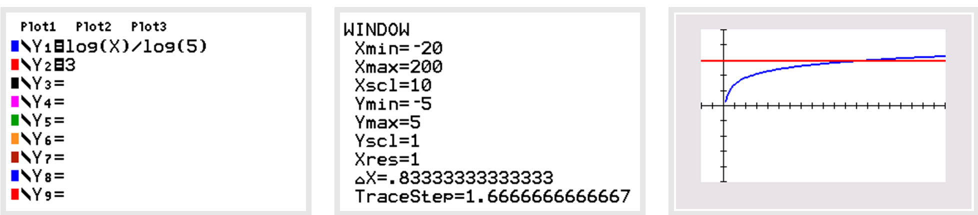
Los op: $^{5}\log(x) < 3$.

Uitleg

Los exact op: $^{5}\log(x) < 3$.

Zo'n ongelijkheid los je op met behulp van grafieken.

- Eerst los je de bijbehorende vergelijking $^{5}\log(x) = 3$ algebraïsch op door aan beide zijden een exponentiële functie met grondtal 5 toe te passen: $x = 5^3 = 125$.
- Vervolgens bekijk je de grafieken van $y_1 = {}^{5}\log(x)$ en $y_2 = 3$. Daarbij moet je vooral letten op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.
- De oplossing wordt: $0 < x < 125$.



Figuur 2

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16$.

a Plot de grafiek van f.

b Bepaal met de grafische rekenmachine voor welke waarde van x geldt: $f(x) = 38$.

c Bepaal nu ook algebraïsch voor welke waarde van x geldt: $f(x) = 38$.

d Iemand beweert dat het algebraïsch oplossen van de vergelijking twee voordelen heeft ten opzichte van het grafisch oplossen. Ten eerste kost het nogal wat tijd om het juiste venster in te stellen waaruit je de oplossing kunt aflezen. Ten tweede is de oplossing die je uit de grafiek afleest, geen exacte oplossing. Wat vind je van deze bewering?

Opgave 2

Gegeven is weer de functie $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16$. Nu moet de ongelijkheid $3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16 \leq 38$ worden opgelost tot op één decimaal.

a Bepaal het domein en het bereik van f en de asymptoot van de grafiek van f.

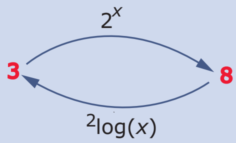
b Lees de oplossing van de ongelijkheid af uit de grafiek van f.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **oplossing van de logaritmische vergelijking** ${}^{g}\log(x) = a$ vind je door aan beide zijden een exponentiële functie met grondtal g toe te passen.

Uit ${}^{g}\log(x) = a$ volgt dan $x = g^{a}$.
Hierbij moet $g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.



Figuur 3

De **logaritmische ongelijkheid** ${}^{g}\log(x) < a$ los je op met behulp van grafieken:

- Eerst los je de bijbehorende vergelijking ${}^{g}\log(x) = a$ op.
- Vervolgens bekijk je de grafieken van $y_1 = {}^{g}\log(x)$ en $y_2 = a$. Daarbij moet je vooral letten op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.
- De oplossing lees je uit de grafiek af.

Bij ingewikkelde vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig. Soms moet je zelfs van grondtal wisselen.

Voorbeeld 1

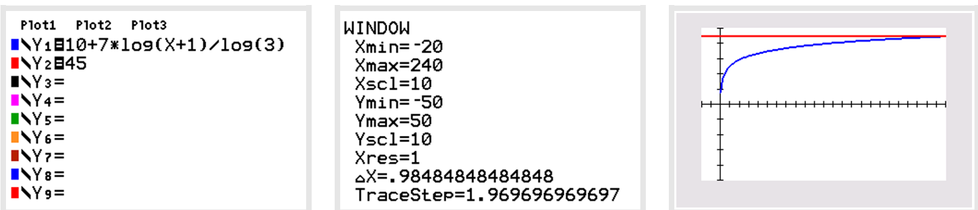
Los op: $10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1) \leq 45$.

Antwoord

Maak de grafieken van $y_1 = 10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1)$ en $y_2 = 45$ op de grafische rekenmachine. Voor de logaritmische functie bedenk je vooraf dat het domein $\langle -1, \rightarrow\rangle$ is, met een verticale asymptoot $x = -1$. Hiermee en met $y_2 = 45$ bepaal je de vensterinstellingen.

- $10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1) = 45$ geeft ${}^{3}\log(x+1) = 5$ en dus $x + 1 = 3^5$.
  Hiermee vind je: $x = 242$.
- Nu bekijk je de grafiek en lees je de oplossing af: $-1 < x \leq 242$.

Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.



Figuur 4

Opgave 3

Los op de manier van **Voorbeeld 1** op: $2 + 3 \cdot {}^{2}\log(x - 4) \leq 11$.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^{0,5}\log(x + 5)$.

a Los algebraïsch op: $f(x) = -3$.

b Bepaal het domein, het bereik en de vergelijking van de asymptoot van f en plot de grafiek.

c Los op: $f(x) \geq -3$.

Opgave 5

Teken met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(2 - x)$.

a Bepaal van beide functies het domein.

b Schrijf van beide functies de vergelijking van de asymptoot op.

c Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

d Los op: $f(x) > g(x)$.

Voorbeeld 2

Bij het oplossen van sommige vergelijkingen heb je de eigenschappen van logaritmen nodig.
Los algebraïsch op: ${}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x + 2) = 3$.

Antwoord

$$\begin{aligned}
{}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) &= 3 \\
{}^{2}\log(x(x+2)) &= 3 \\
2^{{}^{2}\log(x(x+2))} &= 2^{3} \\
x(x+2) &= 8 \\
x^{2} + 2x - 8 &= 0 \\
(x-2)(x+4) &= 0 \\
x &= -4 \vee x = 2
\end{aligned}$$

In plaats van het toepassen van een exponentiële functie met grondtal 2, kun je er ook voor kiezen om met behulp van de andere definitieformule 3 te schrijven als ${}^{2}\log\left(2^{3}\right)$, waarna je ook uitkomt op $x(x + 2) = 2^{3}$.

Vanwege het domein van de logaritmes moet $x > 0$ en $x + 2 > 0$. Alleen $x = 2$ voldoet daaraan en dit is daarom de enige oplossing van de gegeven vergelijking.

Opgave 6

Los algebraïsch op: ${}^{6}\log(x) + {}^{6}\log(x - 1) = 1$.

Opgave 7

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = 4$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) \leq 4$

c $-5 + 4 \cdot {}^{2}\log(x - 2) = 11$

d $-5 + 4 \cdot {}^{2}\log(x - 2) \leq 11$

e ${}^{3}\log(x - 2) = 1 + 5 \cdot {}^{3}\log(2)$

f $\log(2x) - \log(x - 1) = 2$

Voorbeeld 3

Sommige vergelijkingen met logaritmen los je op met behulp van de rekenregel voor het wisselen van grondtal.

Los algebraïsch op: ${}^{\frac{1}{2}}\log(2-x) \geq {}^{2}\log(x)$.

Antwoord

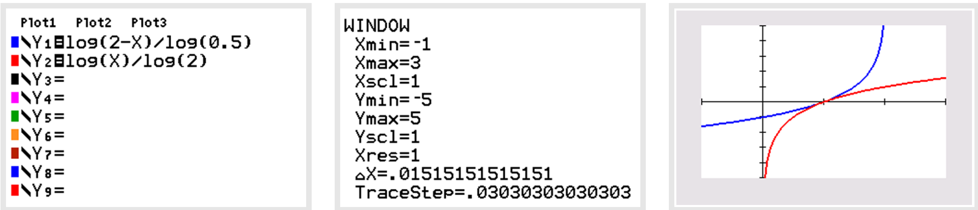
Maak eerst de grafieken van $y_1 = {}^{\frac{1}{2}}\log(2-x)$ en $y_2 = {}^{2}\log(x)$.

- ${}^{\frac{1}{2}}\log(2-x) = {}^{2}\log(x)$ los je op door van grondtal te wisselen, bijvoorbeeld y_1 naar grondtal 2 omzetten: ${}^{\frac{1}{2}}\log(2-x) = \frac{{}^{2}\log(2-x)}{{}^{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)} = -{}^{2}\log(2-x)$.

  De vergelijking wordt daarmee $-{}^{2}\log(2-x) = {}^{2}\log(x)$ en dus ${}^{2}\log(2-x) + {}^{2}\log(x) = 0$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(x(2-x)) &= 0 \\ x(2-x) &= 2^0 = 1 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

- Vervolgens gebruik je de grafieken van y_1 en y_2 om de oplossing af te lezen.



Figuur 5

Je vindt dat y_1 altijd groter of gelijk is aan y_2, tenminste binnen beide domeinen van deze functies. De oplossing is daarom: $0 < x < 2$.

Opgave 8

Gebruik in deze opgave de rekenregel voor het wisselen van grondtal.

a Los algebraïsch op: ${}^{2}\log(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

b Los op: ${}^{2}\log(x) < {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

Verwerken

Opgave 9

Maak de grafiek van de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x+4)$.

a Schrijf het domein, het bereik en de asymptoot van f op.

b Los algebraïsch op: $f(x) < 0$.

Opgave 10

Maak de grafiek van de functie $g(x) = -10 + 2 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(x-1)$.

a Schrijf het domein, het bereik en de asymptoot van g op.

b Los algebraïsch op: $g(x) \geq -14$.

Opgave 11

Los algebraïsch op.

a ${}^{3}\log(x) = 2 \cdot {}^{3}\log(5)$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2)$

c $5 - {}^{2}\log(x) = 0$

d ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(3)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2 - x)$

f ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(x)$

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log(x)$ en $g(x) = -1 + {}^{4}\log(x + 3)$.

a Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de asymptoot.

b Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

c Los op: $f(x) \leq g(x)$.

d Los op: $f(x) > g(x)$.

Opgave 13

Druk q uit in p.

a $p = 15 - {}^{3}\log(5 - q)$

b $p = 600 + 15 \cdot \log\left(\frac{q}{200}\right)$

Opgave 14

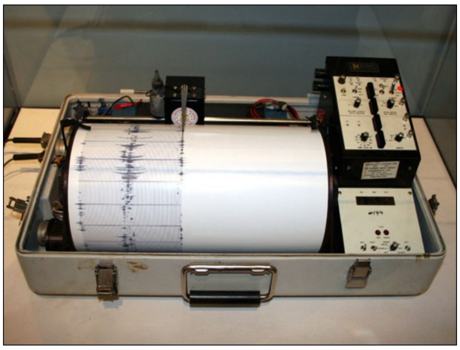
Gegeven is de functie $g(x) = {}^{2}\log(5 - 3x)$.

a Geef de vergelijking van de asymptoot van $g(x)$.

b Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de lijn $x = -2$.

c Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de lijn $y = -2$.

Toepassen



Figuur 6

Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Verspreid over de aarde staan veel seismografen opgesteld. De uitwijking van een seismograaf hangt af van de afstand van dit instrument tot de plaats aan de oppervlakte van de aarde waar de beving het eerst optreedt. Deze plaats noemt men het epicentrum van de aardbeving. Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruikt men seismogrammen die op een afstand van 100 km van het epicentrum zijn gemaakt (standaard seismogrammen). De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme (met grondtal 10) gebruikt van de grootste uitwijking in micrometer die in het seismogram voorkomt.

Opgave 15

Bekijk het verhaal van de schaal van Richter in **Toepassen**.

a Leg uit, dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitwijking van de seismograaf 10 keer zo groot wordt.

De aardbeving in Nederland van 13 april 1992 had een kracht van 5,5 op de schaal van Richter. De kracht van de aardbeving op 27 februari 2010 in Chili was 8,8.

b Bereken de verhouding tussen deze twee grootste uitwijkingen.

Opgave 16

Als op een bepaald waarnemingsstation een seismogram gemaakt is en je weet de plaats van het epicentrum, dan kun je met de volgende formule de kracht van de aardbeving berekenen:

$$R = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1{,}66 \cdot \log(D) + 3{,}30$$

Hierin is:

- R de kracht van de aardbeving uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter
- A de grootste uitwijking in het seismogram in µm (1 µm = 0,001 mm)
- T de tijd in seconden van de trilling met de grootste uitwijking
- D de grootte in graden van de hoek tussen de verbindingslijnstukken ME en MW, waarin M het middelpunt van de aarde, E het epicentrum van de aardbeving en W de plaats van het waarnemingsstation is

Uit de formule volgt inderdaad dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitslag van de seismograaf 10 keer zo groot wordt (bij dezelfde T en D).

a Toon dit aan.

Van de Chileense aardbeving van 2010 werd een seismogram opgenomen. De trillingen gaven daar een maximale uitslag van 1500 µm; de trillingstijd T bedroeg 20 s. Na invulling van D werd $R = 8{,}8$ gevonden. Neem aan dat de omtrek van de aarde 40000 km is.

b Bereken de afstand over de aardbol tussen de plaats waar het seismogram werd opgenomen en het epicentrum in Chili in honderden kilometers nauwkeurig.

Ook op diverse andere plaatsen werd in 2010 een seismogram van de Chileense aardbeving opgenomen. Op al die plaatsen berekende men dat de kracht van de aardbeving 8,8 was.

c Toon aan dat hieruit volgt dat tussen A, T en D een verband bestaat van de vorm: $D = p \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^q$ en bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Testen

Opgave 17

Los algebraïsch op.

a ${}^{7}\log(x-5) = 0$

b $-{}^{0,25}\log(x) = {}^{0,25}\log(5)$

c ${}^{4}\log(x) = 0{,}5 - {}^{4}\log(3)$

d ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) + {}^{\frac{1}{2}}\log(2x) = 0$

Opgave 18

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(2x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(3x-6)$.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van beide functies.

b Bereken voor welke x geldt $f(x) = -2$.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 9$.

d Bereken voor welke x geldt $g(x) < 0$.

e Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

f Los algebraïsch op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 19

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$L = 125 \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

a Herleid de gegeven formule naar de vorm $G = a \cdot 10^{k \cdot L}$.

b Hoe zwaar is een gemiddelde westerse twaalfjarige als ze 1,30 m lang is?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met logaritmen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.