5.4 Logaritmische functies

Inleiding

Logaritmen ontstaan als inverse bewerking van exponentiële functies.
Ook met logaritmen kun je functievoorschriften maken.
Het prototype is de functie $f(x) = {}^{g}\log(x)$.
Alle functies die hieruit door de bekende transformaties kunnen ontstaan noem je logaritmische functies. En die ga je nu bekijken.

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische functies te werken;
- de karakteristieken van logaritmische functies te bepalen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies;
- transformaties van functies toepassen;
- werken met logaritmen.

Verkennen

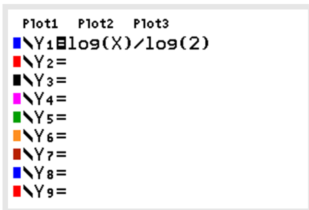
Opgave V1

Op je grafische rekenmachine kun je de grafiek van $f(x) = {}^{2}\log(x)$ in beeld brengen.
Je voert dan in: $y_1 = (\log(x))/(\log(2))$ of $y_1 = \log_2(x)$.

a Breng de grafiek in beeld. Welk domein en welk bereik heeft de functie?

b Welke asymptoot heeft de grafiek van f?

c Bekijk de tabel. Bij welke waarden van x krijg je gehele functiewaarden?



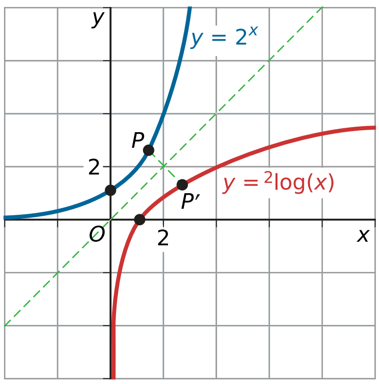
Figuur 1

Uitleg

Bekijk de applet: Logaritme als inverse functie

Bekijk de grafiek van $y = 2^x$. Uit de definitie van de logaritme volgt dan voor elk punt op de grafiek dat $x = {}^{2}\log(y)$. Verwissel je hierin x en y, dan krijg je $y = {}^{2}\log(x)$. Deze logaritmische functie ontstaat dus door vanuit de exponentiële functie terug te rekenen (de inverse bewerking uit te voeren) en vervolgens x en y te verwisselen.

Verwissel je in een punt x en y, dan spiegel je dat punt in de lijn $y = x$. Bij elk punt P op de grafiek van $y = 2^x$ hoort een punt P', dat ontstaat door in P de x en y te verwisselen, op de grafiek van $y = {}^{2}\log(x)$. De grafiek van $y = {}^{2}\log(x)$ is dus het spiegelbeeld in de lijn $y = x$ van de grafiek van $y = 2^x$.



Figuur 2

Dit werkt voor alle positieve grondtallen g, mits $g \neq 1$. De karakteristieken van een logaritmische functie zijn daarom af te leiden uit die van een exponentiële functie (met hetzelfde grondtal) door x en y te verwisselen. Beide functies zijn elkaars inverse functie.

Opgave 1

Er bestaat een verband tussen de grafieken van bijvoorbeeld $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

a Maak beide grafieken op de grafische rekenmachine.

b Het punt $(4,2)$ ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

d Welk verband bestaat er tussen het bereik van y_1 en het domein van y_2?

Opgave 2

Er bestaat een verband tussen de grafieken van bijvoorbeeld $y_1 = 0{,}5^x$ en $y_2 = {}^{0,5}\log(x)$.

a Plot beide grafieken op de grafische rekenmachine.

b Het punt $\left(4, \frac{1}{16}\right)$ ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

d Welk verband bestaat er tussen het bereik van y_1 en het domein van y_2?

e Er geldt $\lim\limits_{x \to \infty} 0{,}5^x = 0$. Licht toe dat hieruit volgt $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^{0,5}\log(x) = \infty$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Logaritme als inverse functie

Een functie van de vorm $f(x) = {}^g\log(x)$ heet een **logaritmische functie**. Hierin is $g > 0$ en $g \neq 1$ een vast gekozen grondtal.

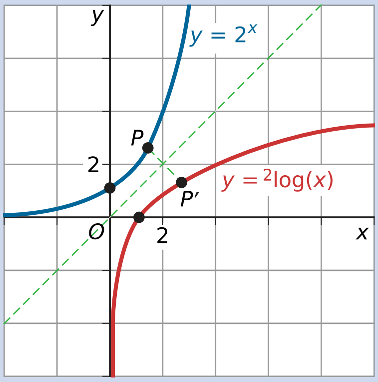
De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de lijn $y = x$. Beide functies zijn elkaars **inverse functie**.

De **karakteristieken** van $y = {}^g\log(x)$ zijn daarom af te leiden uit die van $y = g^x$:

- het domein is $\langle 0, \rightarrow \rangle$
- het bereik is $\mathbb{R}$
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ is de grafiek dalend
- de y-as is de verticale asymptoot van de grafiek:

  $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^g\log(x) = -\infty$ als $g > 1$

  $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^g\log(x) = \infty$ als $0 < g < 1$



Figuur 3

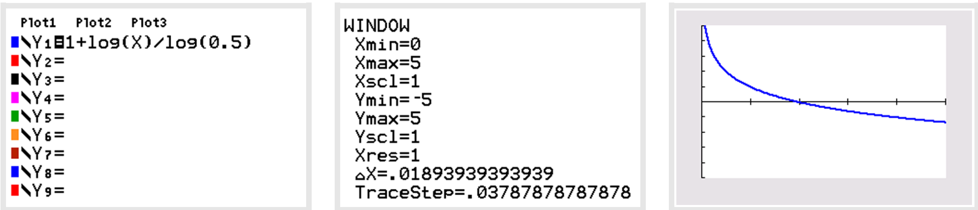
Alle functies die door transformatie uit $y = {}^g\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.

Voorbeeld 1

Bepaal de karakteristieken van de logaritmische functie $f(x) = 1 + {}^{0,5}\log(x)$ en bereken het nulpunt van de grafiek. Leg uit waarom deze functie dezelfde grafiek heeft als $g(x) = 1 - {}^{2}\log(x)$.

Antwoord

De grafiek van f kan uit de grafiek van $y = {}^{0,5}\log(x)$ ontstaan door deze 1 eenheid in de y-richting te verschuiven. Omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek dalend. Verder moet $x > 0$, dus $D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$. De verticale asymptoot is $x = 0$, de grens van het domein.



Figuur 4

$f(x) = 0$ geeft ${}^{0,5}\log(x) = -1$.
Hieruit volgt: $x = 0{,}5^{-1} = 2$.
Het nulpunt is daarom $x = 2$.

Deze functie f heeft dezelfde grafiek als functie g omdat ${}^{0,5}\log(x) = \dfrac{{}^{2}\log(x)}{{}^{2}\log(0{,}5)} = -{}^{2}\log(x)$.

Opgave 3

Teken de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ op de grafische rekenmachine. De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1.

a Schrijf het domein, het bereik en de asymptoot van de functie y_2 op.

b Voor welke waarde van x is $y_2 = 2$?

c Voor welke waarden van x geldt $y_2 > 2$?

Opgave 4

Maak de grafiek van de functie $f(x) = {}^{3}\log(x)$.

a Schrijf het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f op.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 2$?

c Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 2$?

d Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 2$?

Opgave 5

Maak de grafiek van de functie $f(x) = -1 + 2 \cdot {}^{0,3}\log(x - 1)$.

a Schrijf het domein en het bereik van f op.

b Schrijf de vergelijking van de verticale asymptoot op.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{0,3}\log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van f.

Voorbeeld 2

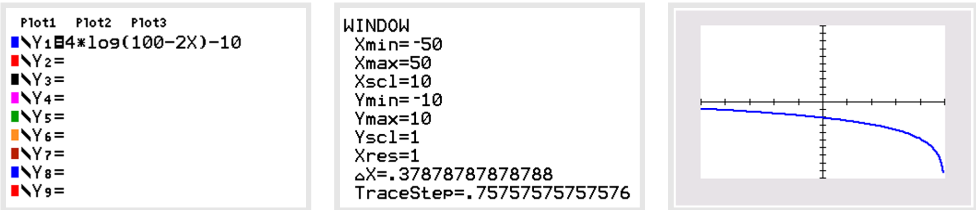
Bepaal de karakteristieken van de logaritmische functie $f(x) = 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10$ en bereken het snijpunt van de grafiek met de x-as.

Antwoord

Door de nogal grote getallen is het verstandig om systematisch de karakteristieken te zoeken:

- $100 - 2x > 0$ geeft: $D_f = \langle \leftarrow, 50 \rangle$. Hiermee bepaal je de vensterinstellingen van de grafische rekenmachine voor de x-as.
- De verticale asymptoot is $x = 50$, de grens van het domein.
- Het bereik is $B_f = \mathbb{R}$ want deze functie kan ontstaan uit $y = \log(x)$, de standaard 10-logaritme.

Je kunt nu de grafiek plotten. Je ziet dat $\lim\limits_{x \uparrow 50} (4 \cdot \log(100 - 2x) - 10) = -\infty$.



Figuur 5

Het nulpunt volgt uit: $f(x) = 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10 = 0$.
Dit levert op: $\log(100 - 2x) = 2{,}5$ en dus $100 - 2x = 10^{2{,}5}$.
Ga na dat daaruit voor het nulpunt volgt: $x \approx -108{,}11$.
Het snijpunt van de grafiek met de x-as is ongeveer $(-108{,}11; 0)$.

Opgave 6

Maak de grafiek van de functie $f(x) = 2 + 3 \cdot {}^{2}\log(x + 4)$.

a Schrijf het domein en het bereik van f op.

b Schrijf de vergelijking van de verticale asymptoot op.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{2}\log(x)$?

d Bereken exact het nulpunt van de grafiek van f.

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = -1 + 4 \cdot {}^{0{,}5}\log(2 - x)$.

a Schrijf het domein en het bereik van g op.

b Schrijf de vergelijking van de verticale asymptoot en de bijbehorende limiet op.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van g uit die van $y = {}^{0{,}5}\log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van g.

Voorbeeld 3

Het verband tussen het geluidsdrukniveau L (in dB) en de effectieve geluidsdruk p (in Pa) is

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

met $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.

Laat zien dat p een exponentiële functie van L is.

Antwoord

Vul eerst $p_0 = 0{,}00002$ in. Herleid vervolgens de gegeven formule naar de vorm $p = ...$

$$\begin{aligned} L &= 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ \frac{L}{20} &= \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ 10^{\frac{1}{20}L} &= \frac{p}{0{,}00002} \\ p &= 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{1}{20}L} \end{aligned}$$

Omdat $10^{\frac{1}{20}L} \approx 1{,}12^L$ kun je dit schrijven als: $p \approx 0{,}00002 \cdot 1{,}12^L$.
p is een exponentiële functie van L.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt de gegeven formule van de effectieve geluidsdruk herleid tot een exponentiële functie van de vorm $p = a \cdot g^L$.

a Voer zelf de herleiding uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

b Hoeveel bedraagt de effectieve geluidsdruk bij een geluidsdrukniveau van 20 dB?

c Hoeveel bedraagt het geluidsdrukniveau bij een effectieve geluidsdruk van 0,001 Pa?

Opgave 9

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats:

$h = -19 \log(p) + 57$

waarin:

- p de druk in hectopascal,
- h de hoogte in km boven zeeniveau is.

Je kunt deze formule herleiden naar de vorm $p = a \cdot g^h$.

a Laat zien, hoe dat gaat.

b Je kunt de formule ook de vorm $p = a \cdot 10^{k \cdot h}$ geven. Hoe ziet de formule er dan uit?

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = -2 + {}^{7}\log(x)$.

a Bepaal de karakteristieken van $f(x)$.

b Bereken algebraïsch het nulpunt van $f(x)$.

c Ga na of $f(x)$ de y-as snijdt en bereken in dat geval het snijpunt met de y-as.

Opgave 11

Plot de grafiek van de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

a Schrijf het domein en het bereik van f op.

b Schrijf de vergelijking van de verticale asymptoot en de bijbehorende limiet op.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = \log(x)$?

d Bereken exact het nulpunt van de grafiek van f.

Opgave 12

De grafieken van de functies $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $g(x) = 2^x$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de y-as. De grafieken van de functies $h(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ en $k(x) = {}^{2}\log(x)$ moeten dan elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de x-as.

a Voor welke waarde van x is $h(x) = 3$?

b Voor welke waarde van x is $k(x) = -3$?

c Laat zien dat de punten die je bij a en b vond elkaars spiegelbeeld in de x-as zijn.

d Geef nog een punt op de grafiek van h en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van k.

e Teken de grafieken van h en k in één figuur en los op: $h(x) = k(x)$.

f Toon nu aan dat $h(x) = -k(x)$ voor willekeurige $x > 0$. Gebruik de rekenregel om van grondtal te wisselen.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = {}^{4}\log\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2$.

a Bepaal domein en bereik van f.

b Laat zien dat de functie $g(x) = 2 \cdot 4^{x-2} + 12$ de inverse functie is van f.

c Welk domein en welk bereik heeft deze inverse functie?

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(2 - x)$.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functies f en g.

b De grafiek van de functie g ontstaat door transformatie uit die van f. Beschrijf de transformaties in de juiste volgorde.

c Teken de grafiek van de functies f en g en los op: $f(x) = g(x)$.

d In welke lijn zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld?

Opgave 15

De formule $k = 4 \cdot \log\left(\frac{D+10}{100}\right) + 5$ is zo te herleiden dat D een exponentiële functie is van k.

Toon dat aan.

Toepassen

Opgave 16: Lichtgevoeligheid

Lichtgevoeligheid van fotografisch opnamemateriaal wordt uitgedrukt in een gevoeligheidsgetal. Het meest gebruikte systeem hiervoor is het ASA-systeem (American Standards Association). Op filmrolletjes staat meestal ook een ander gevoeligheidsgetal vermeld, de DIN-waarde. Het verband tussen ASA en DIN wordt gegeven door de formule

$y = 1 + a \cdot \log(x)$

Hierin geeft x de lichtgevoeligheid in ASA aan en y de lichtgevoeligheid in DIN. Een film van 100 ASA heeft een DIN-waarde 21.

Figuur 6

a Bereken a.

b Maak de grafiek. De meeste films hebben een ASA-waarde tussen 50 en 1000.

c Hoeveel ASA heeft een film met een gevoeligheid van 31 DIN?

d Je kunt de gegeven formule ook herleiden naar de vorm $x = b \cdot 10^{ky}$.
Bereken b en k.

Opgave 17: Schaal van Richter

Een bekende maat voor de sterkte van een aardbeving is de magnitude op de schaal van Richter. Daarvoor geldt bij benadering:

$m = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$

Hierin is:

- m de magnitude op de schaal van Richter
- E de energie in Joule

a Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $E = a \cdot 10^{k \cdot m}$.

b Op 23 augustus 2018 werd Bali getroffen door een aardbeving met een magnitude van 5,2 op de schaal van Richter.
Hoe groot bedroeg de hoeveelheid vrijgekomen energie?

Testen

Opgave 18

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$L = k \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$.

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

a Mark (8 jaar) woont in Nederland en heeft een lengte van 1,30 m en weegt 26,3 kg. Bereken k in gehelen nauwkeurig. Neem aan dat Mark wat lengte en gewicht betreft een gemiddeld Nederlands kind is.

b Helen is 1,40 m lang. Bereken haar gewicht in kg. Rond af op één decimaal.

c Schrijf de formule in de vorm $G = b \cdot g^L$, voor $k = 120$. Geef daarbij g in vier decimalen nauwkeurig.

Opgave 19

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(2x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(3x-6)$.

a Bepaal domein, bereik en de asymptoot van f met de bijbehorende limiet.

b Door middel van welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$?

c Bepaal domein, bereik en asymptoot van g en teken de grafiek van g.

d Door middel van welke transformaties kan de grafiek van g ontstaan uit die van $y = {}^{3}\log(x)$?

e Los op in drie decimalen nauwkeurig: $f(x) = g(x)$.

Practicum: Logaritmische functies

Met deze applet maak je logaritmische functies. Verzin zo'n functie, bedenk eerst hoe hij kan ontstaan uit $y = {}^{g}\log(x)$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

Bekijk de applet: Logaritmische functie

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.