5.2 Eigenschappen

Inleiding

Je hebt nu wel het begrip logaritme leren kennen als oplossing van een exponentiële vergelijking, maar nog geen methode gezien om willekeurige logaritmen rechtstreeks te bepalen (benaderen) met de rekenmachine.
Er zit wel een functie [LOG] op, maar daarmee kun je nog niet op alle rekenmachines voor elk willekeurig grondtal de logaritme van een getal vinden. Je hebt de eigenschappen van logaritmen nodig. Die ga je nu bekijken. Tegenwoordig hebben de meeste rekenmachines wel een mogelijkheid om de logaritme van een willekeurig grondtal meteen te vinden.

Je leert in dit onderwerp

- eigenschappen van logaritmen gebruiken;
- logaritmen berekenen met de grafische rekenmachine;
- exponentiële en logaritmische vergelijkingen algebraïsch oplossen.

Voorkennis

- werken met het begrip logaritme;
- logaritmen bepalen vanuit exponentiële vergelijkingen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet dat $g^x = y$ gelijkwaardig is met $x = {}^{g}\log(y)$. Dat levert eigenschappen van logaritmen op:

a Hoe volgt hier uit dat ${}^{g}\log(g^x) = x$?

b Welke andere eigenschap volgt hier rechtstreeks uit?

c Wat gebeurt er als je twee logaritmen optelt? Is ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a+b)$?

Uitleg

Voor het saldo S op een spaarrekening t jaar na een eenmalige storting van € 4000,00 en een jaarlijkse rente van 5% geldt: $S(t) = 4000 \cdot 1{,}05^t$.
De tijd die nodig is om het saldo te verdubbelen vind je door $1{,}05^t = 2$ op te lossen. De verdubbelingstijd bij een groeifactor van 1,05 is daarom ${}^{1{,}05}\log(2)$. Zo is de verdrievoudigingstijd te vinden uit $1{,}05^t = 3$. De verdrievoudigingstijd van het saldo is dus ${}^{1{,}05}\log(3)$.

De verzesvoudigingstijd van het saldo is ${}^{1{,}05}\log(6)$. Die verzesvoudigingstijd kun je ook vinden door de verdubbelingstijd en de verdrievoudigingstijd op te tellen.
Dit levert op: ${}^{1{,}05}\log(6) = {}^{1{,}05}\log(2) + {}^{1{,}05}\log(3)$
ofwel: ${}^{1{,}05}\log(2) + {}^{1{,}05}\log(3) = {}^{1{,}05}\log(2 \cdot 3)$

De verachtvoudigingstijd van het saldo is ${}^{1{,}05}\log(8)$. Die verachtvoudigingstijd kun je ook vinden door drie keer de verdubbelingstijd te nemen.
Dit levert op: ${}^{1{,}05}\log(8) = 3 \cdot {}^{1{,}05}\log(2)$
ofwel: $3 \cdot {}^{1{,}05}\log(2) = {}^{1{,}05}\log\left(2^3\right)$

Op deze wijze kun je enkele eigenschappen van logaritmen aannemelijk maken.

Opgave 1

Je hebt een saldo S op een spaarrekening met een jaarlijkse rente van 5%. Op $t = 0$ is het saldo € 4000,00.

a Hoelang duurt het voordat het saldo twee keer zo groot (dus € 8000,00) geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme, maar ook afgerond op één decimaal.

b Hoelang duurt het voordat het saldo drie keer zo groot geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme, maar ook afgerond op één decimaal.

c Hoelang duurt het voordat het saldo zes keer zo groot geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme, maar ook afgerond op één decimaal.

d Het antwoord bij a kun je krijgen door het antwoord bij b van dat bij c af te trekken. Controleer dit en geef een verklaring.

e Bij d heb je een voorbeeld van een eigenschap van logaritmen.
Om welke eigenschap gaat het hier?

Opgave 2

Bij exponentiële afname komt het begrip halveringstijd voor.

a Geef een omschrijving van het begrip halveringstijd. Maak hierbij gebruik van een logaritme.

b Bereken in maanden nauwkeurig de halveringstijd wanneer een hoeveelheid jaarlijks met 7% afneemt.

c De radioactieve stof strontium heeft een halveringstijd van 28 jaar. Bereken de groeifactor per jaar. Rond af op drie decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Definitie **logaritme**: $g^x = y$ is gelijkwaardig met $x = {}^{g}\log(y)$, als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en als $y > 0$.

Definitieformules: Uit de definitie van logaritme volgt: ${}^{g}\log(g^x) = x$ en $g^{{}^{g}\log(y)} = y$.

Eigenschappen van logaritmen: Als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en als $a > 0$ en $b > 0$ geldt:

- ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$
- ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$

Bewijs 1

De eigenschappen van logaritmen bewijs je vanuit de definitieformules (die volgen meteen uit de definitie van logaritme). Steeds geldt $0 < g < 1$ of $g > 1$ en ook $a > 0$ en $b > 0$.

Je gaat uit van de bekende eigenschappen van machten.
Bijvoorbeeld: $g^r \cdot g^s = g^{r+s}$. Neem je hierin $r = {}^{g}\log(a)$ en $s = {}^{g}\log(b)$, dan vind je: $g^{{}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b)} = g^{{}^{g}\log(a)} \cdot g^{{}^{g}\log(b)} = a \cdot b$
Hierbij gebruik je de definitieformules. Neem ten slotte links en rechts van de vergelijking de g-logaritme en je vindt: ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$

Op vergelijkbare wijze bewijs je: $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$. En de derde eigenschap volgt door de andere twee te combineren (met $p = -1$).

Verandering van grondtal: Om met steeds hetzelfde grondtal te kunnen werken (de log-toets van je rekenmachine gebruikt altijd grondtal 10), moet je van grondtal kunnen veranderen. Uit de eigenschappen van logaritmen kun je afleiden: ${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$.
Dit geldt voor elk bruikbaar grondtal p, dus ook voor grondtal 10. Zo kun je logaritmen met je rekenmachine berekenen en/of als functie invoeren; het grondtal 10 laat je vaak weg: ${}^{g}\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$.
Merk op dat nieuwere rekenmachines soms de mogelijkheid hebben om het grondtal van de logaritme zelf te kiezen. Vaak moet je dan de Amerikaanse notatie $\log_g(x)$ gebruiken. Je ziet dat daarin het grondtal een andere plaats krijgt.

Voorbeeld 1

De eigenschappen van logaritmen stellen je in staat om met logaritmen te rekenen. Bijvoorbeeld:

- ${}^{6}\log(24) + 2 \cdot {}^{6}\log(3) = {}^{6}\log(24) + {}^{6}\log\left(3^2\right) = {}^{6}\log(24 \cdot 9) = {}^{6}\log(216) = 3$
- ${}^{2}\log(12) + {}^{0,5}\log(12) = {}^{2}\log(12) + \frac{{}^{2}\log(12)}{{}^{2}\log(0,5)} = {}^{2}\log(12) - {}^{2}\log(12) = 0$
- ${}^{2}\log(7) \cdot {}^{7}\log(8) = \frac{\log(7)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(8)}{\log(7)} = \frac{\log(8)}{\log(2)} = {}^{2}\log(8) = 3$
- $2^{{}^{2}\log(7)} = 7$ (volgens de definitieformules)

Opgave 3

Je kunt eigenschappen van logaritmen controleren door getallen in te vullen. Controleer.

a ${}^{2}\log(16) + {}^{2}\log(8) = {}^{2}\log(128)$

b ${}^{2}\log(16) - 3 \cdot {}^{2}\log(2) = {}^{2}\log(2)$

c ${}^{3}\log(3) + {}^{3}\log(9) = {}^{3}\log(27)$

Opgave 4

Pas de eigenschappen van logaritmen toe op de uitdrukkingen om ze te vereenvoudigen.

a ${}^{2}\log(72) - 2 \cdot {}^{2}\log(3)$

b ${}^{2}\log(80) + {}^{0,5}\log(5)$

De volgende uitdrukkingen kun je herleiden tot één logaritme. Laat zien hoe.

c ${}^{2}\log(7) + {}^{3}\log(81)$

d $0,5 \cdot {}^{2}\log(36) - 1$

Opgave 5

In de **Theorie** vind je het bewijs van een aantal genoemde logaritmische eigenschappen.

a Gebruik de bekende eigenschap van machten - $(g^r)^s = g^{r \cdot s}$ - om te bewijzen dat $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$.

b Bewijs nu de eigenschap ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$.

Voorbeeld 2

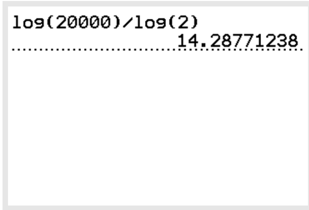
Los de vergelijking $2^t = 20000$ op met behulp van de log-toets van je rekenmachine.

Antwoord

De log-toets van veel rekenmachines werkt alleen met grondtal 10. Je schrijft daarom bij 10-logaritmen het grondtal niet meer op, $\log(2)$ betekent automatisch de 10-logaritme van 2. Om dan zo'n vergelijking te kunnen oplossen, moet je van grondtal 2 naar grondtal 10 wisselen.

Dit kun je op twee manieren aanpakken:

- Ga uit van $2^t = 20000$ en neem aan beide zijden de 10-logaritme: $\log\left(2^t\right) = \log(20000)$. Met de eigenschappen van logaritmen wordt dit: $t \cdot \log(2) = \log(20000)$. Dus: $t = \frac{\log(20000)}{\log(2)} \approx 14{,}2877$
- De oplossing van $2^t = 20000$ is $t = {}^2\log(20000)$. Op sommige rekenmachines kun je dit meteen invoeren als $\log_2(20000) \approx 14{,}2877$. Anders moet je van grondtal wisselen: ${}^2\log(20000) = \frac{\log(20000)}{\log(2)} \approx 14{,}2877$



Figuur 1

Opgave 6

De vergelijking $g^x = a$ kun je op twee manieren met logaritmen oplossen. Los de vergelijkingen op beide manieren op. Rond af op vier decimalen.

a $3^x = 8100$

b $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 0{,}002$

Voorbeeld 3

Los de vergelijking ${}^2\log(x) = 3$ algebraïsch op.

Antwoord

Bij het oplossen van zo'n vergelijking gebruik je de definitieformules. Als je op beide zijden een exponentiële functie met grondtal 2 toepast, krijg je: $2^{{}^2\log(x)} = 2^3$ en dat betekent: $x = 2^3 = 8$.

Je kunt het ook zo zien:

$$\begin{aligned} {}^2\log(x) &= 3 \\ {}^2\log(x) &= {}^2\log\left(2^3\right) \\ x &= 2^3 = 8 \end{aligned}$$

Opgave 7

Los op.

a ${}^5\log(x) = 2$

b ${}^4\log(2x) = 0$

c ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(x^2\right) = -4$

d ${}^2\log(\sqrt{x}) = 5$

Voorbeeld 4

Los de vergelijking $\log(x) + \log(2x) = 3$ algebraïsch op.

Antwoord

Bij het oplossen van dergelijke vergelijkingen gebruik je de eigenschappen van logaritmen:

$$\begin{aligned} \log(x) + \log(2x) &= 3 \\ \log(x \cdot 2x) &= 3 \\ \log\left(2x^2\right) &= 3 \\ 2x^2 &= 10^3 = 1000 \\ x &= \pm\sqrt{500} \end{aligned}$$

Omdat je geen logaritme uit een negatief getal kunt trekken, is er maar één oplossing mogelijk: $x = \sqrt{500}$.

Opgave 8

Los algebraïsch op.

a $\log(4x) + \log(x) = 1$

b $2 \cdot \log(x) - \log(2x) = 2$

Verwerken

Opgave 9

Gebruik de eigenschappen van logaritmen en bereken.

a ${}^{10}\log(5) + {}^{10}\log(20)$

b ${}^{5}\log(100) - {}^{5}\log(4)$

c $2 \cdot {}^{6}\log(3) + {}^{6}\log(4)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(45) - {}^{\frac{1}{3}}\log(5)$

Opgave 10

Ga na welke van de volgende logaritmen eenvoudig zonder rekenmachine te berekenen zijn. Geef van die opgaven het exacte antwoord. Bereken van de overige opgaven het antwoord in drie decimalen. Gebruik hierbij de log-toets van de rekenmachine.

a ${}^{2}\log(100)$

b ${}^{7}\log\left(\sqrt{7}\right)$

c ${}^{8}\log(8000)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(50)$

e $\log(40) + \log(25)$

f ${}^{\frac{1}{3}}\log(0{,}0003)$

Opgave 11

Een radioactieve stof vervalt volgens de formule $N(t) = N(0) \cdot 0{,}93^{t}$.
N is de hoeveelheid in milligram en t de tijd in jaren.

a Hoeveel bedraagt de halveringstijd? Rond af op twee decimalen.

b Een laboratorium heeft 400 gram van deze stof. Bereken met behulp van de halveringstijd hoelang het duurt totdat deze hoeveelheid minder is geworden dan 50 gram.

c Bereken tot op een maand nauwkeurig hoelang het duurt totdat 50 gram van deze stof minder is geworden dan 10 gram.

Opgave 12

Het radioactieve calcium-45 heeft een halveringstijd van 165 dagen.

a Na hoeveel tijd is er van een willekeurige beginhoeveelheid calcium-45 nog $\frac{1}{4}$ deel over?

b Na hoeveel tijd is er van een willekeurige beginhoeveelheid calcium-45 nog $\frac{1}{8}$ deel over?

c In een laboratorium is 100 gram calcium-45 aanwezig. Schat met behulp van de antwoorden bij a en b hoelang het duurt totdat deze hoeveelheid minder is geworden dan 15 gram.

d Bereken het antwoord van c op één dag nauwkeurig.

Opgave 13

Los de vergelijkingen algebraïsch op, maar ook afgerond op één decimaal.

a $10 \cdot 5^x = 0{,}16$

b ${}^3\log\left(x^2\right) = 3$

c $\log(2x) - 2 \cdot \log(x) = 1$

Opgave 14

Een hoeveelheid groeit exponentieel met een groeipercentage van p procent.

Toon aan dat de verdubbelingstijd T gegeven wordt door $T = \frac{\log(2)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$.

Toepassen

Opgave 15: Halfwaardetijd

Bij radioactieve stoffen wordt in plaats van het woord ‘halveringstijd’ vaak het woord ‘halfwaardetijd’ gebruikt. In een laboratorium bevindt zich 800 gram van het radioactieve natrium-24. Deze stof heeft een halfwaardetijd van 15 uur.

a Laat zien hoe lang het duurt tot er nog maar 100 gram van het natrium-24 over is.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur? Rond af op vier decimalen.

c Bereken tot op een kwartier nauwkeurig hoe lang het duurt tot er van de 800 gram natrium-24 nog maar 160 gram over is.

Opgave 16: Napierlogaritmen

John Napier (1550—1617) was de uitvinder van de logaritme. Echter, zijn logaritme zat iets anders in elkaar dan de logaritmen die je tegenwoordig gebruikt. Napiers logaritme voor een getal x is $\text{Nap}\log(x)$. Dan is $\text{Nap}\log(x) = {}^a\log\left(10^7\right) - {}^a\log(x)$ met $a = \frac{10^7}{10^7 - 1}$.

Herleid Napiers logaritme naar logaritmen met grondtal 10.

Testen

Opgave 17

Iemand koopt een huis voor € 200.000 en verwacht dat de waarde van het huis per jaar 10% zal stijgen.

a Hoe lang duurt het voordat het huis € 300.000 waard is?
Schrijf het antwoord als logaritme en bereken dit logaritme tot op de maand nauwkeurig.

b Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis twee keer zo groot is geworden? Rond af op twee decimalen.

c Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis drie keer zo groot is geworden? Rond af op twee decimalen.

d Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis zes keer zo groot is geworden? Laat zien hoe je dit kunt berekenen met behulp van de antwoorden bij b en c.

e Hoe kun je het antwoord van d in één keer berekenen?

Opgave 18

Een suikerpatiënt moet zich een injectie met insuline toedienen op het moment dat er nog maar een derde deel van de vorige injectie insuline in zijn bloed zit. De hoeveelheid insuline in het bloed neemt per uur met 8% af.

Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende injecties? Schrijf de oplossing als logaritme en geef een benadering in uren nauwkeurig.

Opgave 19

Los algebraïsch op.

a $600 \cdot 0{,}5^t = 20$

b ${}^5\log(1 - x) = 2$

c ${}^2\log\left(3x^2\right) = 5$

Opgave 20

Omstreeks 1650 groeide de wereldbevolking met een percentage van 0,3% per jaar.

Schrijf de verdubbelingstijd als logaritme en geef een benadering in gehele jaren.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden of berekenen van uitdrukkingen met logaritmen**. De notatie $\log_{g(x)}$ wordt hierbij gebruikt.

Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.