4.5 Meer exponentiële functies

Inleiding

De basisfunctie van alle exponentiële functies is $f(x) = g^x$ met $g > 0$. Alle andere exponentiële functies kunnen uit f ontstaan door transformatie.
Ze hebben allemaal de vorm $y = b \cdot g^x + d$.
Je zult zien dat deze exponentiële functies wel degelijk nulpunten kunnen hebben...

Je leert in dit onderwerp

- werken met transformaties van de functie $f(x) = g^x$ met $g > 0$;
- de karakteristieken van deze exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met deze exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

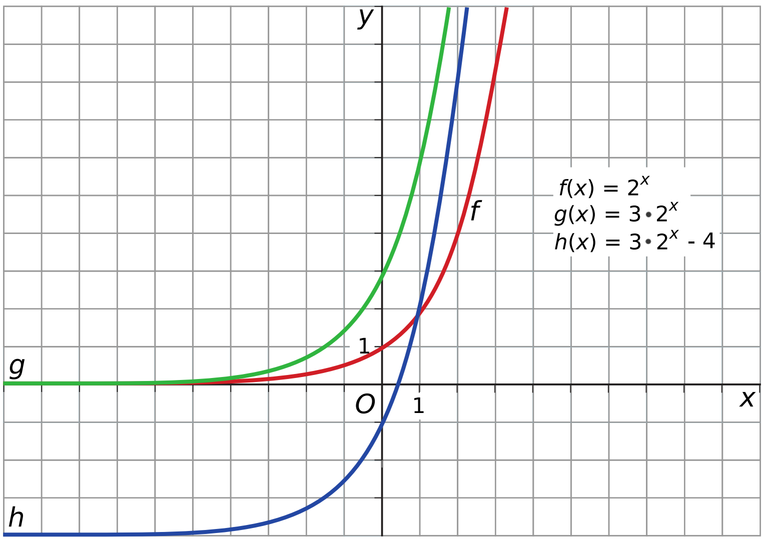
Laat zien dat de volgende functies kunnen worden geschreven in de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

a $y_1 = 1 - 3 \cdot 0{,}5^x$

b $y_2 = -3 \cdot 0{,}5^{2x} - 4$

Uitleg

Bekijk de applet: Exponentiële functies



Figuur 1

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $y = g^x$ met $g > 0$. Alle functies die hieruit door transformatie kunnen ontstaan hebben de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$:

- $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = 0$ te kiezen. De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door ten opzichte van de x-as met 3 te vermenigvuldigen.
- $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = -4$ te kiezen.
  De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door ten opzichte van de x-as met 3 te vermenigvuldigen en vervolgens de grafiek -4 eenheden ten opzichte van de x-as te verschuiven (een translatie van -4 ten opzichte van de x-as dus).

Een functie als $f(x) = 3 \cdot 2^{2x-1} - 4$ herleid je tot

$f(x) = 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-1} - 4 = 1{,}5 \cdot 2^{2x} - 4 = 1{,}5 \cdot \left(2^2\right)^x - 4 = 1{,}5 \cdot 4^x - 4$.

De grafiek ontstaat door $b = 1{,}5$, $g = 4$ en $d = -4$ te kiezen. En dus door die van $y = 4^x$ ten opzichte van de x-as met 1,5 te vermenigvuldigen en vervolgens een translatie ten opzichte van de x-as van -4 eenheden uit te voeren.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + d$ in beeld kunt brengen.

a Neem $b = 3$, $g = 2$ en $d = 1$. Welk functievoorschrift $f_1(x)$ krijg je? Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f_1 uit die van $y = 2^x$?

b Neem $b = 3$, $g = \frac{1}{2}$ en $d = -1$. Welk functievoorschrift $f_2(x)$ krijg je? Uit welke basisfunctie kan de grafiek van f_2 door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?

c Neem $b = -10$, $g = 1{,}5$ en $d = 100$. Welk functievoorschrift $f_3(x)$ krijg je? Bij welke vensterinstellingen krijg je alle karakteristieken van de grafiek van f_3 goed in beeld?

Opgave 2

Bekijk de functie met voorschrift $f(x) = 6 \cdot 2^{-2x-1} - 12$.

a Herleid het functievoorschrift tot het de vorm $y = b \cdot g^x + d$ heeft.

b Uit de grafiek van welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan?

c Welke transformaties moet je dan toepassen?

d Bereken met behulp van de grafische rekenmachine het nulpunt van de grafiek van f.

e Dit nulpunt had je ook algebraïsch kunnen vinden. Laat zien hoe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Exponentiële functies

Elke getransformeerde **exponentiële functie** heeft een functievoorschrift dat kan worden geschreven in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.
Hierbij moet je soms gebruikmaken van de rekenregels voor machten. De grafiek van f is te tekenen door op die van de standaardfunctie $y = g^x$ de volgende transformaties toe te passen:

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor b;
- translatie ten opzichte van de x-as met d eenheden.

De grafiek van f heeft daarom als **horizontale asymptoot** de lijn $y = d$. Het eventuele nulpunt vind je door $b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen. Vaak heb je daarvoor de rekenmachine nodig.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 60 \cdot 2^x - 480$.
Breng de grafiek in beeld met de grafische rekenmachine en bepaal de vergelijking van de asymptoot.
Los ook op: $f(x) < 0$.

Antwoord

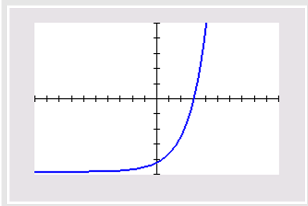
De grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = 2^x$ door:

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 60;
- translatie ten opzichte van de x-as met -480 eenheden.

De horizontale asymptoot is daarom $y = -480$.
Bij een venster van $[-10,10] \times [-500,500]$ komt de grafiek goed in beeld.

$f(x) = 0$ als $60 \cdot 2^x - 480 = 0$, dus als $60 \cdot 2^x = 480$. Als je beide zijden van deze vergelijking door 60 deelt, vind je $2^x = 8$. Omdat $8 = 2^3$ is, kun je de oplossing zonder rekenmachine vinden: $x = 3$.

Uit de grafiek volgt nu de oplossing van de ongelijkheid: $x < 3$.



Figuur 2

Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5$.

a Hoe kun je de grafiek van h krijgen door transformatie van de grafiek van f?

b Welke lijn is asymptoot van de grafiek van h?

c Geef D_h en B_h.

d Los op $h(x) < 0$.

e Vereenvoudig de vergelijking $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 50 = 1000$ en los op in drie decimalen nauwkeurig.

f Los op in drie decimalen nauwkeurig: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 50 > 1000$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie g met voorschrift $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$.
Laat zien hoe deze functie door transformatie kan ontstaan uit een basisfunctie van de vorm $y = g^x$.
Los ook algebraïsch op: $g(x) > 0$.

Antwoord

Eerst herleiden:

$g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = -2 \cdot 2^{-x} \cdot 2^1 + 16 = -4 \cdot \left(2^{-1}\right)^x + 16 = -4 \cdot 0{,}5^x + 16$

De grafiek van de functie $g(x) = -4 \cdot 0{,}5^x + 16$ kan ontstaan door transformatie van $y = 0{,}5^x$:

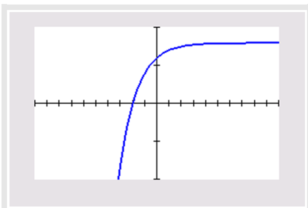
- vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met -4;
- verschuiving ten opzichte van de x-as van 16 eenheden.

Voor het oplossen van $g(x) = 0$ is het oorspronkelijke voorschrift handiger:
$16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = 0$ geeft $16 = 2 \cdot 2^{-x+1}$.

Nu is $16 = 2^4$ en $2 = 2^1$, dus staat hier: $2^4 = 2^{-x+2}$.

Dit betekent dat: $4 = -x + 2$ zodat $x = -2$.

Uit de grafiek volgt de oplossing van de ongelijkheid: $x > -2$.



Figuur 3

Opgave 4

De grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot 2^{x+1} - 1$ kun je door transformatie uit de grafiek van de functie $g(x) = 2^x$ laten ontstaan.

a Je kunt dit doen door drie transformaties toe te passen. Welke drie? Schrijf ze in de juiste volgorde op.

b Herleid het functievoorschrift van f tot $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$.

c Beschrijf hoe je door twee transformaties de grafiek van f kunt laten ontstaan uit die van g.

d Het punt $(0,1)$ op de grafiek van g wordt na de transformaties een punt op de grafiek van f. Bereken de coördinaten van dit punt.

e Schrijf de horizontale asymptoot en het domein en het bereik van f op.

Opgave 5

Je hebt allerlei technieken geleerd om vergelijkingen algebraïsch op te lossen. In dit hoofdstuk moet je vaak ook werken met de rekenregels voor machten. Hier zie je daarvan een voorbeeld.

$$\begin{aligned}
4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} - 2\sqrt{2} &= 6\sqrt{2} \\
4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} &= 8\sqrt{2} \\
\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} &= 2\sqrt{2} \\
\left(2^{-1}\right)^{1-x} &= 2^{1\frac{1}{2}} \\
2^{x-1} &= 2^{1\frac{1}{2}} \\
x - 1 &= 1\tfrac{1}{2} \\
x &= 2\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

a Leg stap voor stap uit wat er gebeurt.

b Los zelf de volgende vergelijking algebraïsch op: $4 \cdot 3^x + 6 = 330$.

c Los algebraïsch op: $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27\sqrt{6}$.

Opgave 6

Los de ongelijkheid $40 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 100 > 110$ op in drie decimalen nauwkeurig. Vereenvoudig de vergelijking eerst zover mogelijk en gebruik pas daarna als dat nodig is de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 3

Een kop koffie komt uit een automaat. De koffie koelt af tot kamertemperatuur. De afkoeling gaat in het begin snel. Naarmate het temperatuurverschil tussen koffie en omgeving kleiner wordt, gaat de afkoeling trager. De temperatuur hangt af van de tijd waarin de koffie afkoelt.

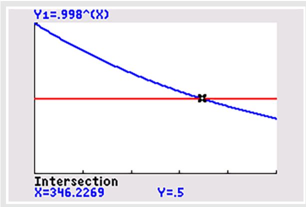
De functie $K(t) = 60 \cdot 0{,}998^t + 20$ beschrijft de temperatuur van de koffie in een omgeving van 20 °C. Hierin is t de tijd in seconden nadat de koffie uit de automaat komt.
De meeste mensen vinden koffie niet lekker als de temperatuur is gedaald tot beneden de 50 °C. Na hoeveel seconden is dat het geval?

Antwoord

Op $t = 0$ is de $K(0) = 80$ °C. De temperatuur daalt langzaam richting 20 °C.

De vergelijking $60 \cdot 0{,}998^t + 20 = 50$ kun je met de grafische rekenmachine oplossen; je kunt er ook eerst $0{,}998^t = 0{,}5$ van maken. Ga na dat je vindt: $t \approx 346$.

Conclusie: na ongeveer 346 seconden (5 minuten en 46 seconden) is de koffie voor de meeste mensen niet meer lekker.



Figuur 4

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je de functie $K(t) = 60 \cdot 0{,}998^t + 20$, waarin t de tijd in seconden is nadat de koffie uit de automaat komt en K de temperatuur in °C .

a Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de temperatuur daalt?

b Wat is de horizontale asymptoot van de grafiek van K en wat betekent dat?

c Na hoeveel seconden heeft de koffie een temperatuur van 70 °C?

Opgave 8

Een thermoskan wordt 's morgens om 8:00 uur gevuld met koffie van ongeveer 80 °C. De koffie in de thermoskan koelt af volgens de formule: $T(t) = 21 + 60 \cdot 0{,}83^t$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t het aantal uren na 8:00 uur.

a Ga ervan uit dat de koffie niet meer lekker is als de temperatuur beneden de 50 °C komt. Tot hoe laat is de koffie te drinken? Bereken dit tot op de minuut nauwkeurig.

b Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de koffie bij het vullen van de thermoskan een temperatuur had van 81 °C?

c Hoe kun je de grafiek van T uit die van $T = 0{,}83^t$ laten ontstaan door transformatie?

d Hoelang duurt het voor de koffie een temperatuur bereikt van 22 °C?

e Welke lijn is asymptoot van de grafiek van $T(t)$?

f De koffie staat in een woonkamer. Kun je aan het functievoorschrift van $T(t)$ zien wat de temperatuur is van de woonkamer?

Verwerken

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden op. Vereenvoudig eerst zover mogelijk en geef daarna de oplossing in twee decimalen nauwkeurig.

a $5^x = 10$

b $5^x \leq 10$

c $3 \cdot 5^x + 5 = 10$

d $3 \cdot 5^x + 5 > 10$

Opgave 10

Los algebraïsch op.

a $2^x = 2\sqrt{2}$

b $4^x = 8^{x+2}$

c $9^{2x} = \sqrt{3}$

d $2^{2x-1} = 32$

e $2^{\frac{1}{2}x+1} = 4\sqrt{2}$

Opgave 11

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $2 \cdot 10^x = 2000$

b $3 \cdot 2^x - 2 = 46$

c $6 \cdot (5^x + 5) = 180$

d $162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > 2$

e $7 + 16 \cdot 1{,}5^x \leq 43$

f $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 160$

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0{,}5^{x-3} - 1$.

a Herleid beide functievoorschriften tot de vorm $y = b \cdot g^t + d$. Hoe ontstaan de grafieken van f en g door transformatie uit grafieken van bijpassende standaardfuncties?

b Los algebraïsch op: $f(x) = -2\frac{7}{8}$. Gebruik je omgeschreven formule uit a.

c Los op: $g(x) > 1{,}5$. Rond het antwoord af op twee decimalen.

d Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \leq 4$?

e De lijn $y = p$ heeft wel een snijpunt met de grafiek van f, maar niet met de grafiek van g. Bereken p.

f De lijn $x = -1$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. Bereken de exacte lengte van lijnstuk AB.

g De lijn $y = 5$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D. Bereken de lengte van lijnstuk CD in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 13

Los algebraïsch op als dat mogelijk is. Geef anders een benadering met twee cijfers achter de komma.

a $4 \cdot 0{,}5^x - 1 < 0$

b $2 \cdot 2^{-x+1} - 1 > 0$

c $6 \cdot 0{,}25^x - 4 \geq 0{,}75$

d $3 \cdot 0{,}5^{2x-1} - 4 < -3{,}25$

e $3{,}5^{x+50} - 0{,}5 > 3$

f $-2^x + 1 \geq -7$

Opgave 14

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0{,}95^t$ geeft de hoeveelheid $A(t)$ in mg van het medicijn die na t minuten in het bloed aanwezig is.

a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van $A(t)$ stijgend is?

b Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $A(t)$.

c Na hoeveel minuten (in gehelen) is 75% van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen?

Toepassen

Sommige vergelijkingen moet je op een bijzondere manier oplossen.

Stel je wilt de vergelijking $3^x + 3^{x+1} = 36$ oplossen.

Dan ga je eerst $3^x + 3^{x+1}$ in de vorm $a \cdot 3^x$ schrijven:

$3^x + 3^{x+1} = 3^x + 3 \cdot 3^x = 4 \cdot 3^x$

De vergelijking wordt daarmee $4 \cdot 3^x = 36$.

En nu is hij eenvoudig op te lossen. Ga na dat $x = 2$ de oplossing is.

Opgave 15

Los algebraïsch op.

a $2 \cdot 4^{x-1} + 4^x = 96$

b $5^{x-4} = 25^{3x-6}$

c $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2} = 4^{x-1}$

d $3^{x+2} - 9^{\frac{1}{2}x-1} = 2\frac{26}{27}$

Opgave 16

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $-4^{2(x+1)} - 2 \leq 2^{4x+4} - 10$

b $\frac{4}{9^{-2x}} = 324 \cdot 27^{\frac{1}{3}x^2}$

c $\frac{60}{12} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 5 \geq 5^{-x} + 25$

Testen

Opgave 17

Bekijk de volgende functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 3 \cdot 2^x - 7$.

a Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren om de grafiek van g te krijgen uit de grafiek van f.

b Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van g. Geef ook het domein en bereik.

c Los op: $g(x) \geq 100$.

Opgave 18

Gegeven is functie f met $f(x) = -1{,}5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 5$.

a Welke twee transformaties moet je uitvoeren om de grafiek van de f te krijgen uit de grafiek van $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

b Hoe kun je aan het functievoorschrift van f zien dat de grafiek stijgt?

c Welke lijn is asymptoot van de grafiek van f? Wat is het bereik van f?

d Bereken het snijpunt van de grafiek van f met de x-as. Rond af op twee decimalen.

e Los op: $f(x) \leq 0$. Geef je antwoord in twee decimalen.

Opgave 19

Los algebraïsch op.

a $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{18}$

b $5^{x-2} < \frac{1}{5}\sqrt{5}$

Opgave 20

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x - 2$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

a Geef het bereik van de functies f en g.

b Los op: $g(x) \leq 5$. Rond het antwoord af op twee decimalen.

c Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossingen?

d De lijn $x = -3$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. Bereken de lengte van lijnstuk AB.

e De lijn $y = 7$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D. Bereken de lengte van lijnstuk CD in twee decimalen nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.