

4.3 Exponenten en machten

Inleiding

Je hebt in het kader van exponentiële groei allerlei rekenregels en eigenschappen van machten en hun exponenten opgebouwd. Deze eigenschappen van exponenten en machten zul je veel moeten toepassen. Daarom moet je die eigenschappen goed 'in de vingers hebben'. Hoog tijd voor algebraïsche vingeroefeningen...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de rekenregels voor exponenten en machten;
- uitdrukkingen herschrijven zonder negatieve of gebroken exponenten;
- uitdrukkingen herschrijven als een macht van x ;
- herleiden van formules tot de standaardvorm.

Voorkennis

- werken met negatieve en gebroken exponenten;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten.

Verkennen

Opgave V1

Bereken: $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}}$.

Uitleg

Om $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}}$ te kunnen berekenen, moet je de eigenschappen van machten goed beheersen. Je rekenmachine laat je namelijk (zeer waarschijnlijk) in de steek.

Ga na, dat: $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}} = \frac{(19^{220})^{\frac{1}{4}}}{19^{54}} = \frac{19^{55}}{19^{54}} = 19$.

Bekijk stap voor stap welke eigenschappen er zijn gebruikt.

Opgave 1

Bekijk de berekening in de **Uitleg**.

- Welke eigenschap van machten is er in de eerste stap gebruikt voor het 'wegwerken' van de wortel?
- Welke eigenschap is er vervolgens gebruikt?
- En welke eigenschap als laatste?

Opgave 2

Bereken.

a $\frac{31^{25} \cdot \sqrt[3]{31^{30}}}{(31^{12})^3}$

b $\frac{25^4 \cdot (5^5)^9}{\sqrt[4]{5^{40}} \cdot 125^{14}}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor elk positief grondtal g en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende **eigenschappen van machten**:

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = (\sqrt[a]{g})^b$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$

Deze rekenregels gelden soms ook voor negatieve grondtallen g , maar hier moet je voorzichtig mee zijn. Kijk maar:

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = -1$$

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{6}} = 1$$

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = \left((-1)^{\frac{1}{6}}\right)^2 \text{ kan niet.}$$

Voor één uitdrukking, drie verschillende uitkomsten!?

Om dit probleem op te lossen, zul je een extra voorwaarde moeten stellen en dat is dat de breuken in de macht niet verder vereenvoudigd kunnen worden.

Bij exponentiële functies mag je ervan uitgaan dat het grondtal g positief is.

Denk verder nog aan de eigenschap $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Voorbeeld 1

Je ziet enkele berekeningen met behulp van de eigenschappen van machten.

- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{3^1}\right)^{-4} = (3 \cdot 1)^{-4} = 3^4 = 81$
- $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
- $16^{1,5} = 16^{1+\frac{1}{2}} = 16^1 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \sqrt{16} = 16 \cdot 4 = 64$
- $27^{-\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = (\sqrt[3]{27})^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Opgave 3

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a 3^{-2}

b $81^{\frac{1}{4}}$

c $8^{1\frac{2}{3}}$

d $2^{-3} \cdot 2^7$

e $(3^{-12})^{\frac{1}{4}}$

f $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

Voorbeeld 2

Je ziet hoe je $2x^{-1\frac{1}{2}}$ kunt schrijven zonder negatieve en/of gebroken exponenten:

$$2x^{-1\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{2}{x^{1 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

Opgave 4

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $2x^{2\frac{1}{3}}$

b $\frac{3x^{-1}}{2x}$

c $4x^{\frac{3}{4}}$

d $2x^{\frac{1}{2}}$

Voorbeeld 3

Je kunt $3x\sqrt{x}$ schrijven in de vorm $a \cdot x^b$:

$$3x\sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{1\frac{1}{2}}$$

Opgave 5

Schrijf in de vorm $a \cdot x^b$.

a $\frac{3}{2x}$

b $\frac{3}{2x\sqrt{x}}$

c $(4\sqrt[3]{x})^2$

d $2x\sqrt{x}$

e $\frac{2}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

f $3x^5 \cdot (2x^3)^2$

Voorbeeld 4

Gegeven is de functie $f(x) = 0,5^{2x-1}$.

Schrijf deze functie in de standaardvorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Antwoord

Met de eigenschappen van machten vind je:

$$f(x) = 0,5^{2x-1} = 0,5^{2x} \cdot 0,5^{-1} = (0,5^2)^x \cdot 2 = 2 \cdot 0,25^x$$

Dit functievoorschrift is nu in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ en dit is een standaardvorm voor formules waarbij sprake is van exponentiële groei. Het begingetal is 2 en de groefactor is 0,25.

Opgave 6

Gegeven is f door $f(x) = 12 \cdot 3^{-0,5x+1}$.

Laat zien dat dit een functie is van de vorm $y = b \cdot g^x$ en bereken b en g exact.

Verwerken

Opgave 7

Bereken zonder rekenmachine.

a $(2^3)^2$

b $2^3 \cdot 2^2$

c $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^8$

d $1000^{\frac{1}{3}}$

Opgave 8

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $x^{-\frac{1}{2}}$

b $x^{\frac{3}{4}}$

c $3x^{-1,5}$

d $\frac{1}{2}x^{-2,75}$

Opgave 9

Schrijf in de vorm $a \cdot x^b$.

a $\frac{1}{x^2 \sqrt{x}}$

b $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[4]{x}}$

c $\frac{1}{2x \sqrt{x}}$

d $(3x \sqrt{x})^3$

Opgave 10

Bereken.

a $\frac{17^{105}}{17^{22}} \cdot 17^{-85}$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^{219} \cdot 8^{72}$

c $\left(\frac{3}{4}\right)^{231} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{230} \cdot 3^{233}$

d $\frac{7^{102}}{(49^{10})^5}$

e $\left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}}$

f $\frac{5^3 \cdot (3^5)^{15}}{25 \cdot \sqrt[3]{3^{225}}}$

Opgave 11

Schrijf in de vorm $a \cdot x^b$.

a $(2x^3)^4 \cdot 3x^5$

b $\frac{2x \cdot x^2}{x^4}$

c $\frac{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{9x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}$

d $\frac{\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^3}{x\sqrt{x}}$

e $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{x}$

f $\frac{12x^{\frac{2}{5}}}{6x^{\frac{3}{5}}} + 2x^2$

Opgave 12

Schrijf de volgende functievoorschriften in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

a $f(x) = 3 \cdot 2^{0,5x}$

b $f(x) = 0,5 \cdot x^{+2}$

c $f(x) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x}$

d $f(x) = 7 \cdot 5^{2x+1} + 2 \cdot (\sqrt{5})^{4x}$

Toepassen

Opgave 13: Priemfactoren

Een getal is een priemgetal als het alleen deelbaar is door 1 en door zichzelf, maar niet door een ander getal.

De eerste priemgetallen zijn: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23...

Ieder geheel getal kun je schrijven als een product van priemgetallen. Dit noem je priemfactorontbinding.

Enkele voorbeelden: $14 = 2 \cdot 7$, $27 = 3^3$, $147 = 3 \cdot 7^2$ en $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

- a** Ontbind de volgende getallen in priemfactoren: 26, 25, 144, 127, 202.
b Gebruik priemfactorontbinding en de eigenschappen van machten en exponenten om de volgende breuken te herleiden.

$$\bullet \frac{126^2 \cdot 3773}{\sqrt{81 \cdot 343 \cdot 693}}$$

$$\bullet \frac{5 \cdot 2 \cdot 19600^{\frac{1}{2}}}{91}$$

$$\bullet \frac{1080^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{5^{\frac{4}{3}}}}{1296^{\frac{1}{4}}}$$

Testen

Opgave 14

Bereken.

- a** $3^{-5} \cdot 9^2$
b $2^{-10} \cdot (2^3)^5$
c $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
d $81^{\frac{1}{4}}$

Opgave 15

Schrijf zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $\frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot x}{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}$

b $\frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{x}}$

Opgave 16

Schrijf in de vorm $b \cdot x^a$.

a $\frac{x^2 \cdot 3x^4}{10x^7}$

b $\frac{2 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6}{8 \cdot \sqrt{x}}$

c $\frac{6x \cdot \sqrt[4]{x^2}}{4x^3}$


Opgave 17

Schrijf het functievoorschrift $f(x) = 12 \cdot (\sqrt{3})^{2x+1}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met machten met gebroken en/of negatieve exponenten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
