4.2 Reële exponenten

Inleiding

Tot nu toe kun je bij exponentiële groei eigenlijk alleen wat zeggen op tijdstippen die gehele positieve waarden hebben. En dat is natuurlijk niet wenselijk, je wilt weten hoeveel bacteriën er zijn na 1,5 uur, of 2,3 uur voor het begintijdstip.
Je gaat nu kijken hoe het met gebroken en/of negatieve exponenten zit.
Dat levert weer een paar nieuwe rekenregels voor machten op...
In het algemeen zul je leren werken met alle mogelijke reële exponenten.

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken en/of negatieve exponenten;
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden;
- alle rekenregels voor het werken met machten;
- exponentiële vergelijking met de grafische rekenmachine oplossen.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

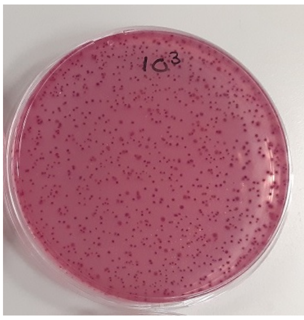
Opgave V1

De hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 600 \cdot 2^t$. Het startmoment van meten, $t = 0$, is vandaag om 12:00 uur.

a Hoeveel bacteriën zullen er geweest zijn om 11:00 uur? En om 10:00 uur?

b Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je terug gaat in de tijd? Kan dat ook zonder formule alleen met de groeifactor?

c Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur?



Figuur 1

Uitleg 1

Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt:
$B = 600 \cdot 2^t$.
$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.
$t = -1$ komt overeen met een uur voor 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën. Als je aanneemt dat dit vóór 12:00 uur ook het geval was, dan zal er om 11:00 uur $600 \cdot \frac{1}{2} = 300$ bacteriën in het schaaltje hebben gezeten.

Het aantal bacteriën in voorgaande uren bereken je door telkens te delen door 2 (vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$).

tijd (uren)	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	150	300	600	1200	2400	4800	9600	19200	38400

Tabel 1

Met het functievoorschrift $B(t) = 600 \cdot 2^t$ kun je de hoeveelheid bacteriën t uur na 12:00 uur berekenen voor positieve gehele getallen t. Wil je met deze formule ook het aantal bacteriën 1 uur voor 12:00 uur kunnen berekenen, dan moet: $B(-1) = 600 \cdot 2^{-1} = 300$. Blijkbaar moet je afspreken dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Ook voor andere tijdstippen voor 12:00 uur wil je het functievoorschrift kunnen gebruiken. Dus moet gelden:

- op tijdstip $t = -1$ (11:00 uur): $600 \cdot 2^{-1} = 600 \cdot \frac{1}{2} = 300$;
- op tijdstip $t = -2$ (10:00 uur): $600 \cdot 2^{-2} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 150$;
- op tijdstip $t = -3$ (9:00 uur): $600 \cdot 2^{-3} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 75$, enzovoort.

Je moet dus ook afspreken dat $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, enzovoort.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$. Daarmee kun je met negatieve exponenten rekenen. Let op: in dat geval mag g niet 0 zijn!

Opgave 1

Neem **Uitleg 1** door. Kijk goed wanneer er negatieve exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 8:00 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Uitleg 2

De hoeveelheid bacteriën B op een petrischaaltje na t uur, kan met de formule $B = 600 \cdot 2^t$ berekend worden. $t = 0$ komt overeen met tijdstip 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën, het groeit met groeifactor 2. Het aantal bacteriën groeit ook met een vaste groeifactor per half uur en bijvoorbeeld per kwartier.

Voor de groeifactor per half uur schrijf je $2^{\frac{1}{2}}$.

Voor de groeifactor per kwartier schrijf je $2^{\frac{1}{4}}$.

Voor de groeifactor per anderhalf uur schrijf je $2^{1\frac{1}{2}}$.

Welk getal stelt $2^{\frac{1}{2}}$ voor?
De groeifactor per uur kun je vinden door de groeifactor per half uur twee keer toe te passen: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$.

Je weet dat $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Dus: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Op dezelfde manier kun je beredeneren dat voor de groeifactor per kwartier geldt: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$. En daarmee kun je met gebroken exponenten rekenen. Let op: nu moet g positief zijn om altijd een reële uitkomst op te leveren. Stel bijvoorbeeld dat $g = -1$, dan is $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ geen reëel getal.

Opgave 2

Neem **Uitleg 2** door. Kijk goed wanneer er gebroken exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 14:30 uur te berekenen?

b Bereken dit aantal op twee manieren, met het functievoorschrift en met behulp van de groeifactor per half uur. Rond je antwoorden af op gehelen.

Opgave 3

Bekijk de groei van de bacteriën in **Uitleg 2**.

a Hoe groot is de groeifactor per drie uur?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per half uur? Rond je antwoord af op twee decimalen.

c Hoe groot is de groeifactor per kwartier? Rond je antwoord af op twee decimalen.

d Gebruik de rekenmachine om het aantal bacteriën te berekenen na 5 uur, na 5,5 uur en na 5,75 uur. Rond je antwoorden af op gehelen.

e Laat zien dat je het aantal bacteriën na 5,75 uur ook kunt berekenen door het aantal na vijf uur eerst te vermenigvuldigen met de groeifactor per half uur en daarna met de groeifactor per kwartier. Rond je antwoord af op gehelen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

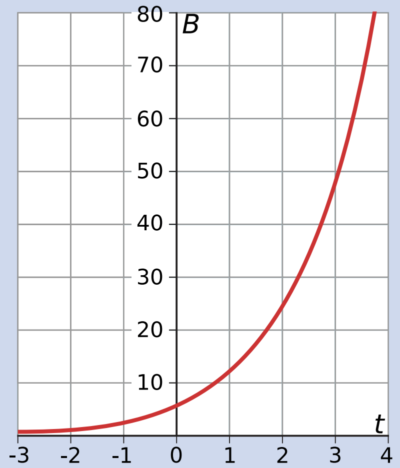
Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de groeifactor die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om met negatieve exponenten en/of gebroken exponenten te kunnen werken, zijn de volgende afspraken nodig:

- **negatieve exponenten**: $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$
- **gebroken exponenten**: $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$

Deze afspraken gelden voor $g > 0$ en positieve gehele n.

Beide afspraken passen in de **rekenregels voor machten**, bijvoorbeeld: $g^{-n} = g^{0-n} = \frac{g^0}{g^n} = \frac{1}{g^n}$.

Je hebt nu gezien dat een macht g^a voor $g > 0$ betekenis heeft als de exponent a een positief getal, nul, een negatief getal of een gebroken getal is. In feite mag a elk reëel getal zijn. En daarom kunnen bij exponentiële groei grafieken worden getekend in de vorm van een vloeiende kromme lijn. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.



Figuur 2

Voorbeeld 1

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de 19e eeuw. Hij dacht dat de groei van de wereldbevolking wel eens exponentieel zou kunnen zijn. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de loop van de negentiende eeuw.

jaartal	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (in miljoenen)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Tabel 2

Stel een passend functievoorschrift op voor de bevolking per jaar. Bereken vervolgens hoeveel mensen er in 1600 en in 2000 volgens dit model hadden moeten zijn.

Antwoord

Van 1800 tot 1820 wordt het aantal mensen vermenigvuldigd met: $\frac{1102}{1000} = 1{,}102$. Ga na dat dit voor elke volgende periode van 20 jaar ook ongeveer zo is. Vanaf 1800 tot 1900 groeide de wereldbevolking dus met een vrijwel constante groeifactor per 20 jaar van 1,102. De groeifactor per jaar is dan $1{,}102^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}005$. Neem je de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1800 en het aantal miljoenen mensen N, dan is: $N(t) = 1000 \cdot 1{,}005^t$.
In 1600 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{-200} \approx 369$ miljoen mensen zijn geweest.
In 2000 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{200} \approx 2712$ miljoen mensen zijn geweest.
In werkelijkheid waren dat er nog veel meer, namelijk meer dan 6000 miljoen!

Opgave 4

In zie je de groei van de wereldbevolking in de negentiende eeuw.

a Bereken de aantallen mensen in 1600 en in 2000 met behulp van de groeifactor per twintig jaar. Ontstaan er verschillen met de antwoorden in het voorbeeld? Rond af op miljoenen nauwkeurig.

b Bereken met behulp van het groeimodel in het voorbeeld het aantal mensen in 2014.

c Wanneer zou volgens dit groeimodel het aantal mensen verdubbeld zijn ten opzichte van het aantal in 1900?

Voorbeeld 2

Een spaartegoed staat uit tegen 5% rente per jaar. De bank kan de rente per half jaar bijschrijven of zelfs maandelijks. Met welke rentepercentages moet men dan werken? Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De groeifactor van het spaartegoed per jaar is 1,05. Als g de groeifactor per half jaar is, kun je die op twee manieren uitrekenen:

- uit $g \cdot g = g^2 = 1{,}05$ volgt $g = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}0247$;
- $g = 1{,}05^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}0247$.

Het rentepercentage per half jaar is dus 2,47%.

Op dezelfde manier is de groeifactor per maand $1{,}05^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}0041$ of $\sqrt[12]{1{,}05} \approx 1{,}0041$. Het rentepercentage per maand is dus 0,41%.

Opgave 5

Iemand zet op 1 juli 2014 een bedrag van € 7500,00 op de bank vast tegen een rente van 4,2% per jaar. Hoeveel bedraagt zijn kapitaal op 1 januari 2016?

a Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per jaar.

b Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per half jaar.

c Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per maand.

Opgave 6

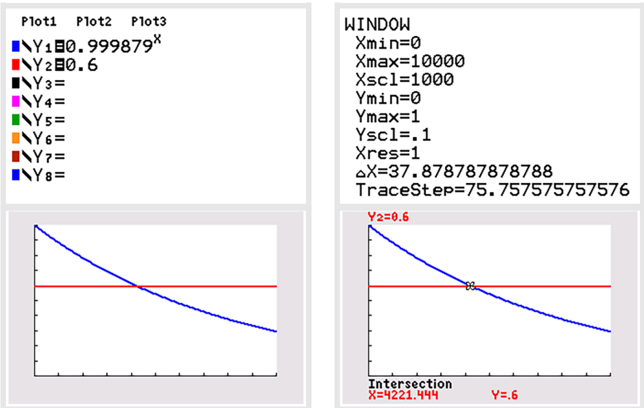
Leg uit waarom en wanneer het nodig kan zijn om het aantal decimalen van een groeifactor in (veel) meer dan drie decimalen te berekenen.

Voorbeeld 3

De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenaamde C14-methode. C14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen, en dergelijke. Deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie C14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.
Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie C14 is afgenomen met 40%. Er is dan dus nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je nu de leeftijd van die mummie?

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Als g de groeifactor per jaar is geldt dus: $g^{5736} = 0{,}5$. Hieruit bereken je de groeifactor per jaar: $g = \sqrt[5736]{0{,}5} \approx 0{,}999879$. Als t de leeftijd van de mummie is moet $0{,}999879^t = 0{,}6$. Deze exponentiële vergelijking los je op met de grafische rekenmachine:
$t \approx 4221$ jaar.
De mummie is dus ongeveer 4221 jaar.



Figuur 3

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt de C14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

a Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Bereken met behulp hiervan de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de concentratie C14 nog maar 28% is.

Verwerken

Opgave 8

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1{,}1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (in jaren) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

a Hoeveel inwoners heeft de groeikern op 1 januari 2025?

b Hoeveel inwoners heeft de groeikern op 1 augustus 2025?

c Hoe groot is de groeifactor per jaar?

d Wat is het groeipercentage per maand?

e Bereken de hoeveelheid inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 9

Op 1 januari 2012 heeft iemand een kapitaal van € 7969,24 op zijn spaarrekening staan. Het kapitaal staat al jaren vast tegen een rente van 6%. De rente wordt ieder jaar bijgeschreven.

a Bereken de grootte van het kapitaal op 1 januari 2011, 1 januari 2010 en 1 januari 2009.

b In welk jaar had het kapitaal een grootte van € 5618,00?

c De spaarder heeft waarschijnlijk een rond bedrag ingelegd toen hij begon met sparen. Wanneer en met welk bedrag is hij waarschijnlijk begonnen?

Opgave 10

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel. In drie uur tijd is het aantal gegroeid van 1200 (om 10:00 uur) naar 3000.

a Wat is de groeifactor per drie uur?

b Bereken het groeipercentage per uur.

c Welke formule kun je opstellen voor de groei van deze kolonie als $H(t)$ de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren is? Neem $t = 0$ op het moment dat er 1200 bacteriën zijn.

d Op welk moment waren er nog 600 bacteriën? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Opgave 11

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in vijftienhonderd jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs 1,2 miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot 2,4 miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking 4,8 miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

a Bereken voor de periodes 1500-1750, 1750-1800 en 1986-1997 het groeipercentage per jaar.

b In welke periodes is de wereldbevolking verdubbeld?

c Bereken voor deze periodes het groeipercentage per jaar.

Opgave 12

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden, is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen.

Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

Toepassen

Opgave 13: Radioactiviteit

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in twee jaar 19% omgezet in radium-224. Een laboratorium had in het jaar 2001 nog 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, na t jaar met $t = 0$ op het moment dat er 1000 mg radium-228 aanwezig was.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 200 milligram omgezet is in radium-224.

c Bereken hoe lang het duurt voordat de helft van de aanwezige radium-228 omgezet is in radium-224.

d Schat met behulp van je antwoord op c hoelang het duurt tot 750 milligram radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 14: Fukushima

Bij de kernramp van Fukushima in 2011 zijn er radioactieve stoffen vrijgekomen, waaronder Cesium-134. De halveringstijd van deze radioactieve stof is twee jaar.

a Hoeveel procent is er drie jaar later nog over van deze stof? Rond je antwoord af op één decimaal nauwkeurig.

b Na hoeveel jaar is er nog 0,1% van de vrijgekomen Cesium-134 over?

Testen

Opgave 15

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten zit er in een liter water 10 gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15% toe te nemen.

a Geef een formule waarmee je de concentratie algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.

b Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15% per week. Hoeveel bedroeg de concentratie drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.

c Hoeveel bedroeg de concentratie twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.

d Na hoeveel dagen is de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 16

Van een bepaalde soort vlinders daalt het aantal exponentieel. In een zeker jaar ($t = 0$) zijn er ongeveer 6000 van deze vlinders. Vijf jaar later zijn er nog maar ongeveer 4300.

a Bereken de groeifactor per jaar van deze soort vlinders.

b Stel een formule op voor het aantal vlinders van deze soort als functie van t (in jaren).

c Met hoeveel procent neemt het aantal vlinders per jaar af?

d Hoeveel bedraagt de halveringstijd voor het aantal vlinders van deze soort?

e Bereken na hoeveel jaar het aantal vlinders voor het eerst minder dan 1000 zal zijn.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.