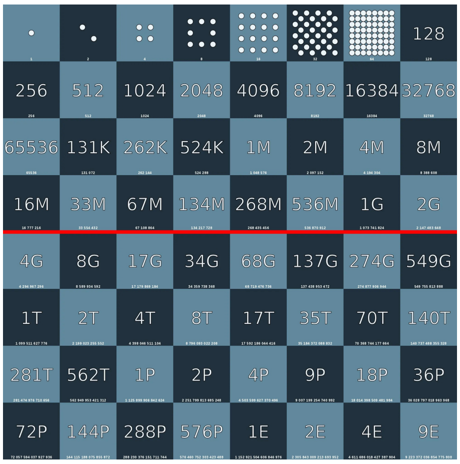
4.1 Exponentiële groei

Inleiding

Groeiverschijnselen komen veel voor, denk aan het toenemen van geld dat je op de bank zet, het toenemen van de kosten als je meer km in de taxi zit, het groeien van de bevolking, enzovoorts. Soms is er sprake van toename met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid, soms is er sprake van toename die afhankelijk is van de hoeveelheid zelf: hoe groter de hoeveelheid, hoe groter ook de toename per tijdseenheid. Bij exponentiële groei is de toename een vast percentage van de totale hoeveelheid.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en afname, bijpassende formules opstellen;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden;
- enkele rekenregels voor het werken met machten.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Stel je voor dat je een heel groot vel papier hebt (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

a Hoeveel lagen papier zijn er na 20 keer dubbelvouwen?

b Waarom zal dit met een A4-tje nooit lukken?

Stel dat het onbegrensde vel papier 0,15 mm dik is.

c Hoe dik is het aantal lagen na 20 keer vouwen?

d Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 cm dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Elke bacterie brengt twee nieuwe bacteriën voort door zich te delen. Bij een geschikte constante temperatuur kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel is te zien.

tijd (uren)	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën;
- na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën;
- na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$ bacteriën;
- na 3 uur is er $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën; enzovoort.

De hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt in dit geval de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2, dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van exponentiële groei.

Met het voorbeeld van bacteriegroei en de functie $B(t)$ kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

- Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn is: $2^0 = 1$.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten vermenigvuldigt tel je de exponenten op.
- Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot \frac{2^7}{2^4}$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten deelt trek je de exponenten af.
- De groeifactor per uur is 2. Per drie uur is die groeifactor $2^3 = 8$.
  De hoeveelheid bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $(2^3)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$

$(2^3)^4 = 2^{12}$

$2^0 = 1$

Figuur 2

Opgave 1

Lees het verhaal van de bacteriegroei in de **Uitleg**.

a Wat versta je onder de ‘groeifactor’ per uur van de hoeveelheid bacteriën?

b Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?

c Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?

Opgave 2

Schrijf als één macht, gebruik de rekenregels.

a $2^5 \cdot 2^6$

b $\frac{5^9}{5^4}$

c $(6^3)^6$

d $5^0 \cdot 5^1$

Opgave 3

Enkele bijzondere gevallen.

a Kun je $2^5 + 2^5$ ook als een macht schrijven?

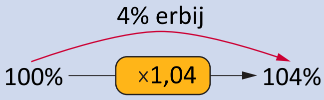
b Hoeveel is 0^4?

c En hoe zit het met 0^0? Welke moeilijkheid doet zich nu voor?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij **exponentiële groei** moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om vast te stellen of de groei exponentieel is, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar. Komt daar steeds hetzelfde getal uit, dan is er sprake van exponentiële groei. De hoeveelheid op $t = 0$ noem je de beginwaarde.



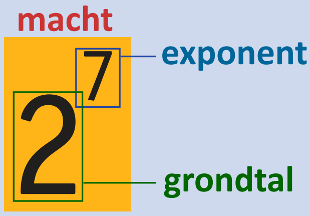
Figuur 3

Als een hoeveelheid met steeds hetzelfde percentage groeit is er sprake van exponentiële groei. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor:

$g = 1 + \frac{p}{100}$.

Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: exponentiële toename.
Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $0 < g < 1$: exponentiële afname.

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je n keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^n. Dit is een **macht**. De groeifactor g heet het **grondtal**, n heet de **exponent**, waarbij n (voorlopig) een positief geheel getal is. Voor $n = 0$ is de afspraak: $g^0 = 1$. In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele getallen n en m de volgende **rekenregels voor machten**:



Figuur 4

$g^n \cdot g^m = g^{n+m}$

$\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$

$(g^n)^m = g^{n \cdot m}$

Bewijs 1

Bewijs van de eerste en de tweede rekenregel:

Per definitie is $g^n = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met n getallen g).

Dus is:
$(g^n)^m = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met n getallen g) $\times$ $g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met m getallen g) $=$
$= g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met $n + m$ getallen g) $= g^{n+m}$.

Omdat $\frac{g}{g} = 1$ (als $g \neq 0$) geldt ook als $g > 0$:
$g^n / g^m = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met n getallen g) / $g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met m getallen g) $=$
$= g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met $n - m$ getallen g) $\cdot\ g/g \cdot g/\ g \cdot \ldots \cdot g/g =$
$= g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met $n - m$ getallen g) $\cdot\ 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = g^{n-m}$

Deze rekenregel geldt ook als $n < m$. Daarover later meer...

En op vergelijkbare wijze kun je ook $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$ beredeneren.

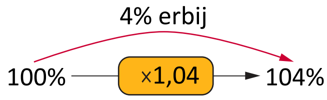
Merk op dat het noodzakelijk is dat n en m positieve gehele getallen zijn, maar dat g elk willekeurig getal ongelijk 0 kan zijn. Verder volgt $g^0 = 1$ nog uit de tweede rekenregel als $n = m$.

Voorbeeld 1

Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf (toen nog) op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit alles vanaf 1 januari 2010 niet verandert en stel een formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010. Maak ook een tabel die laat zien hoe het saldo zich ontwikkelde.

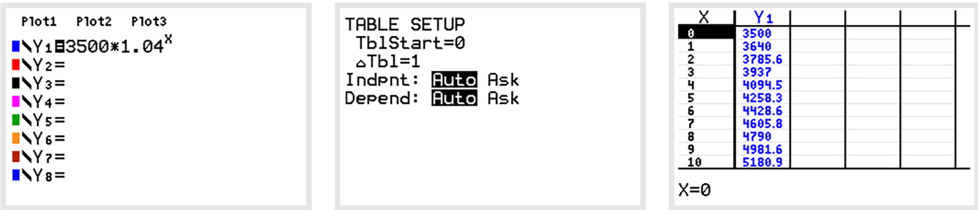
Antwoord

- Bij een toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van 1,04. Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom $S = 3500 \cdot 1{,}04^t$.
- Als je deze formule invoert op de rekenmachine heb je snel een tabel.



Figuur 5

- Per drie jaar is de groeifactor: $1{,}04^3 \approx 1{,}12$ dus het groeipercentage is dan ongeveer 12. Per vijf jaar is de groeifactor: $1{,}04^5 \approx 1{,}22$ dus de groei is dan ongeveer 22%.



Figuur 6

Opgave 4

Iemand zet op 1 januari 2010 € 800,00 op een bankrekening tegen 6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

a Wat is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?

b Hoeveel staat er op de bankrekening op 1 januari 2015?

c Welke formule geldt voor het spaartegoed $S(t)$, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010 is?

d Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.

e Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2030 kunt berekenen:

- $t = 20$ invullen in de formule;
- het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vier jaar;
- het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vijf jaar.

Opgave 5

Je wilt je spaargeld voor een jaar bij de bank op een spaarrekening zetten. Bij bank A kun je 3% rente per jaar krijgen en bij bank B kun je 0,25% rente per maand krijgen. Bij welke bank krijg je de meeste rente?

Voorbeeld 2

Een krant zag in een reeks van jaren het aantal jaarabonnementen dalen.

jaartal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×1000)	970	941	913	885	859	833

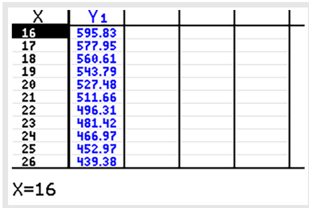
Tabel 2

Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010. Als het aantal jaarabonnementen onder de 500000 zakt raakt de krant in problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

De jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) 0,97 op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei. De groeifactor $g \approx 0{,}97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname. Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3% af.
Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0{,}97^t$.

Maak vervolgens een tabel van deze functie met de rekenmachine. Ga na dat op $t = 22$ de waarde van A minder dan 500 is. Op deze manier raakt de krant dus in 2032 in de problemen.



X	Y1
16	595.83
17	577.95
18	560.61
19	543.79
20	527.48
21	511.66
22	496.31
23	481.42
24	466.97
25	452.97
26	439.38

X=16

Figuur 7

Opgave 6

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 2**. Daarin is sprake van exponentiële afname.

a Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad telkens ongeveer 0,97 is.

b Welke functie vind je voor het aantal abonnementen $A(t)$ als je $t = 0$ neemt in 2017?

c Laat zien dat de krant in 2032 inderdaad in de problemen raakt.

Opgave 7

Neem de tabel over en vul in:

procentuele toename per jaar	13	-6	0,3				
groeifactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 3

Voorbeeld 3

Bereken $\dfrac{256^{1000} \cdot 64^{200}}{1024^{919}}$.

Antwoord

Dit kun je met de rekenregels van machten bereken.

$256 = 2^8$, $64 = 2^6$ en $1024 = 2^{10}$

En dus staat hier: $\dfrac{(2^8)^{1000} \cdot (2^6)^{200}}{(2^{10})^{919}} = \dfrac{2^{8000} \cdot 2^{1200}}{2^{9190}} = \dfrac{2^{9200}}{2^{9190}} = 2^{10} = 1024$.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als één macht te schrijven.

a $\dfrac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}}$

b $\dfrac{(4^3)^2 \cdot 64^4}{16^2}$

c $\dfrac{1296^2 \cdot 7776^3}{36}$

d $\dfrac{5^{112} \cdot 25^{224}}{125^{35} \cdot (5^{20})^3}$

Verwerken

Opgave 9

Schrijf als één macht.

a $2^4 \cdot 2^3$

b $2^4 \cdot (2^3)^4$

c $2^3 + 7 \cdot 2^3$

d $(2^3)^2 \cdot 2^4 + 2^3 \cdot 2^7$

Opgave 10

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2014 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 2 km^2. Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. Op een gegeven moment constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar drie keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

a Geef het functievoorschrift van het met riet begroeide oppervlakte $R(t)$, waarbij t de tijd in jaren is en $t = 0$ op 1 januari 2014 .

b Maak een tabel bij deze functie voor de eerste vijf jaar.

c In welk jaar is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet?

Opgave 11

Schrijf als één macht.

a $\frac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25}$

b $\frac{(49^8)^{10}}{7^{100} . 343^{20}}$

c $\frac{2^{631} . 8^{112}}{2^{622} . 4^{32}}$

d $\frac{8^2 . (64^3)^2}{32^4}$

Opgave 12

Elk jaar wordt het aantal herten in een natuurgebied geteld op 1 januari. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

a Stel een formule op voor de ‘groei’ van het aantal herten N als functie van de tijd t in jaren, waarbij $t = 0$ op 1 januari 2014.

b Bereken het aantal herten op 1 januari 2024.

c Bereken het groeipercentage per tien jaar.

d In welk jaar zal het aantal herten gehalveerd zijn?

Opgave 13

Op 1 januari 2012 had stad A 350000 inwoners. Het aantal inwoners groeit met 3,5 procent per jaar. Op 1 januari 2010 was het aantal inwoners van stad B 400000. Het aantal inwoners groeit in deze stad met 8000 per jaar.

a Stel een formule op van het aantal inwoners N_A van stad A. Neem $t = 0$ op 1 januari 2012.

b Stel een formule op van het aantal inwoners N_B van stad B. Neem $t = 0$ op 1 januari 2012.

c Hoeveel procent inwoners had stad B op 1 januari 2014 meer dan stad A? Geef je antwoord in hele procenten.

d In welk jaar heeft stad A voor het eerst meer inwoners dan stad B?

Toepassen

Opgave 14: De laatste vier cijfers

Onderzoek wat de laatste vier cijfers van 5^{2013} zijn.

Opgave 15: Vervoerskosten

Een chauffeur moet met een vrachtwagen een traject van 100 kilometer lengte rijden. Zijn firma wil weten bij welke snelheid de totale vervoerskosten het laagst zijn. Een vrachtwagen verbruikt bij een snelheid van 60 kilometer per uur voor elke kilometer 0,5 liter brandstof. Bij toename van de snelheid neemt het verbruik exponentieel toe: bij elke toename van de snelheid met 10 kilometer per uur stijgt het verbruik per kilometer met 10%.
Het arbeidsloon van de chauffeur is € 45,00 per uur.
De brandstofkosten zijn € 1,72 per liter.
De totale vervoerskosten bestaan uit brandstofkosten en het arbeidsloon van de chauffeur.

a Hoeveel bedragen de totale vervoerskosten over het traject bij een snelheid van 80 kilometer per uur?

b Bereken bij welke snelheid de totale vervoerskosten het laagst zijn. Rond je antwoord af op hele kilometers per uur.

(naar: examen vwo wiskunde B in 2001, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 16

De huurprijs van een woning is in 2014 € 850,00 per maand. Jaarlijks wordt dit bedrag met 3,2% verhoogt.

a Stel een formule op waarmee je de huurprijs H (in euro's) na t jaar kunt berekenen. Neem $t = 0$ in 2014.

b Hoe groot is de groeifactor in twee decimalen van de maandelijkse huur per 4 jaar?

c Bereken het groeipercentage per 20 jaar.

d Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

Opgave 17

Schrijf als één macht.

a $\dfrac{17^{11} \cdot 17^{54}}{\left(17^{4}\right)^{8}}$

b $\dfrac{3^{115} \cdot 9^{25}}{3^{44} \cdot 27^{12}}$

c $\dfrac{\left(25^{10}\right)^{4} \cdot 5^{7}}{625^{9} \cdot 5^{22}}$

Opgave 18

Iemand koopt voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12% in waarde dalen.

a Stel een functievoorschrift op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen is.

b Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000,00 geworden?

c Bereken het groeipercentage per vijf jaar.

d Met welk getal moet je de waarde na vijf jaar vermenigvuldigen om de waarde na tien jaar te krijgen? Bereken de waarde na tien jaar.

e Bereken het groeipercentage per tien jaar.