3.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Asymptoten en limieten**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- karakteristieken van een functie — toppen — nulpunten — snijpunt y-as
- asymptoot — horizontale asymptoot — verticale asymptoot
- limiet — oneindig — linker limiet en rechter limiet — scheve asymptoot
- continu — perforatie in de grafiek — sprong in de grafiek

Activiteitenlijst

- karakteristieken van een functie berekenen — schetsen van een grafiek
- horizontale en verticale asymptoten van een grafiek bepalen
- limieten berekenen — scheve asymptoten van een grafiek bepalen
- perforaties en sprongen van een grafiek bepalen — de continuïteit van een functie vaststellen

Achtergronden


Figuur 1

Het begrip ‘limiet’ werd als vrij snel na de invoering van het functiebegrip breed gebruikt. Maar het begrip ‘oneindig’ dat er veel bij wordt gebruikt is nogal vaag. Een wiskundige zoals **Karl Weierstrass (1815—1897)** was dat een doorn in het oog (en hij was de enige niet). Hij gebruikte nauwkeuriger omschrijvingen zonder termen als oneindig te gebruiken.

Neem aan dat f een reële functie is en c een reëel getal. Dan betekent

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

dat $f(x)$ zo dicht bij L uitkomt als je maar wilt, als je x maar voldoende dicht bij c brengt. Onder andere Karl Weierstrass herformuleerde dit in de 19de eeuw tot de zogenaamde ε,δ-definitie van limiet.
In deze definitie stelt ε een willekeurig klein positief getal voor, zo dat $f(x)$ komt willekeurig dicht bij L betekent dat $f(x)$ uiteindelijk in het interval $\langle L-\varepsilon, L+\varepsilon \rangle$ ligt, wat je kunt schrijven als $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Dat dit gebeurt als x voldoende dicht bij c wordt gebracht, betekent dat de x-waarden minder van c afliggen dan een positief getal δ, dus dat de x-waarden binnen $\langle c-\delta, c \rangle$ of $\langle c, c+\delta \rangle$ liggen, dus $0 < |x - c| < \delta$.

En $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ betekent dat $f(x)$ zo dicht bij L uitkomt als je maar wilt, als je x maar groot genoeg maakt. Weierstrass zegt dan dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een N hoort, zodat $|f(x) - L| < \varepsilon$ als $x > N$. (Hierin wordt verondersteld dat N een groot getal is en ε juist heel klein.)

Testen

Opgave 1

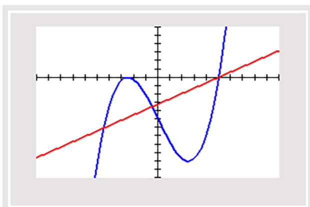
Gegeven zijn de functies $f(x) = (x+5)^2(x-10)$ en $g(x) = 16x - 160$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van f en breng de grafiek in beeld. Pas de vensterinstellingen zo aan, dat je hetzelfde beeld krijgt als in de gegeven grafiek. Zet nu ook de grafiek van g erbij.

b Bepaal de extremen van f.

c Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f en g.

d Los op: $f(x) < g(x)$.


Figuur 2

Opgave 2

Bepaal van de functies de asymptoten en schrijf het domein en het bereik ervan op.

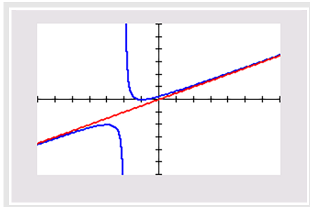
a $f(x) = \frac{4-x}{2x+4}$

b $g(x) = 4 - \frac{x}{x-1}$

c $h(x) = \frac{2x-5}{x^2+3}$

Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{(x+5)^2}{x+10}$ en $g(x) = x$.



Figuur 3

a Bereken het nulpunt en de verticale asymptoot van f en breng de grafiek in beeld. Pas de vensterinstellingen zo aan, dat je hetzelfde beeld krijgt als in de gegeven grafiek. Zet ook de grafiek van g erbij.

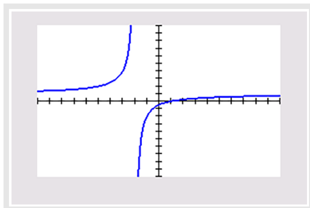
b Bepaal de extremen van f.

De grafiek van g lijkt een scheve asymptoot te zijn van de grafiek van f.

c Laat zien dat dit inderdaad het geval is door het functievoorschrift van f te herleiden en geef de vergelijking van de scheve asymptoot.

Opgave 4

Je ziet de grafiek van $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+x-2}$.



Figuur 4

a De grafiek lijkt een verticale asymptoot $x = -2$ te hebben. Toon aan met behulp van limieten dat dit inderdaad het geval is.

b Wat is het domein van deze functie?

c Welke perforatie kent de grafiek van f? Schrijf de bijbehorende limieten op.

d Welke horizontale asymptoot kent de grafiek van f? Schrijf de bijbehorende limieten op.

Opgave 5

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = \frac{|x^2-2x|}{x}$.

Verklaar de vorm van deze grafiek door de functie in delen op te splitsen.

Opgave 6

Gegeven is de functie f door:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2} & \text{voor} \quad x < -2 \vee x > 2 \\ ax^3 + bx & \text{voor} \quad -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

f is continu voor elke waarde van x en de grafiek gaat door het punt (1,2).

a Bereken a en b.

b Bepaal het bereik van f.

c Los op: $f(x) \leq x$. Rond af op één decimaal.

Toepassen

Opgave 7: Zwaartekracht

In 1665 formuleerde Newton de algemene zwaartekrachtwet als volgt: ‘Twee massa's oefenen altijd wederzijds een aantrekkende kracht op elkaar uit: de gravitatiekracht. Voor twee puntmassa's geldt’

$$F = g \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

‘waarin m_1 en m_2 de massa's van die puntmassa's zijn (in kg) en r hun onderlinge afstand (in m) is, g de gravitatieconstante en F de wederzijdse zwaartekracht (in newton) is. Die kracht heeft de richting van hun verbindingslijn.’.

Bekend is dat $g \approx 6{,}7 \cdot 10^{-11}$. Neem verder aan dat $m_1 = 1 \cdot 10^5$ kg en $m_2 = 1 \cdot 10^6$.

a Beschrijf voor deze situatie de zwaartekracht met een formule.

b Bereken $\lim\limits_{r \to \infty} F(r)$. Welke natuurkundige betekenis heeft dit?

c Bereken $\lim\limits_{r \downarrow 0} F(r)$. Welke natuurkundige betekenis heeft dit?

Opgave 8: Massa volgens Einstein

Einstein's formule voor de massa van een bewegend deeltje luidt

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

waarin m_0 de rustmassa en c de lichtsnelheid constanten zijn. m is dus een functie van de snelheid v van het deeltje in m/s.

a Welke waarde heeft m als $v = 0$? Kun je de naam ‘rustmassa’ verklaren?

m neemt toe met de snelheid. Dat lijkt erg vreemd want je merkt er in de praktijk niets van. Dat komt omdat je normaal gesproken met snelheden te maken hebt die veel kleiner zijn dan de lichtsnelheid $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

b Als $v = 3 \cdot 10^6$ m/s, met hoeveel procent is de massa van een deeltje dan toegenomen?

c Als $v = 3 \cdot 10^7$ m/s, met hoeveel procent is de massa van een deeltje dan toegenomen?

d Welke waarden kan v aannemen volgens deze formule?

e Hoe groot is $\lim\limits_{v \uparrow c} m(v)$? Welke natuurkundige betekenis heeft dit? En waarom heeft $\lim\limits_{v \downarrow c} m(v)$ geen betekenis?

Examen

Opgave 9: Limiet van een hoek

Voor de grootte van $\angle M_1 M_2 M_3$ geldt $\cos(\angle M_1 M_2 M_3) = \frac{r+12}{2r+12}$.

Als r onbegrensd toeneemt, nadert de grootte van $\angle M_1 M_2 M_3$ tot een limiet.

Bereken exact deze limiet in graden.

(naar: pilotexamen wiskunde B vwo 2017, eerste tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.