3.4 Continuïteit

Inleiding

Als je in een functievoorschrift breuken aantreft waarbij de variabele (ook) in de noemer voorkomt, krijg je vaak te maken met problemen rond het delen door 0. Ook zijn er soms situaties waarin voor grote waarden de teller en de noemer wel heel groot worden, maar de breuk zelf niet. Vaak heb je dan met asymptoten te maken, maar niet altijd. Er is altijd wel wat bijzonders aan de hand...

$\frac{a}{0} = ?$

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat je onder een continue functie verstaat;
- in welke situaties (perforatie, verticale asymptoot, sprong in de grafiek) een functie niet continu is.

Voorkennis

- werken met functies (ook met de grafische rekenmachine) en de bijbehorende notaties gebruiken;
- nulpunten, toppen en asymptoten als karakteristieken van een functie berekenen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven;
- het begrip limiet en limieten bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Als je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ op de grafische rekenmachine bekijkt, krijg je een rechte lijn te zien. Gezien het functievoorschrift (dat er helemaal niet lineair uitziet) is dat nogal verrassend.

a Maak de grafiek van f op de grafische rekenmachine. Krijg je inderdaad een rechte lijn?

b Bij welke waarde van x hoort geen functiewaarde?

c Hoeveel bedraagt $\lim_{x \downarrow 3} f(x)$ en hoeveel bedraagt $\lim_{x \uparrow 3} f(x)$?

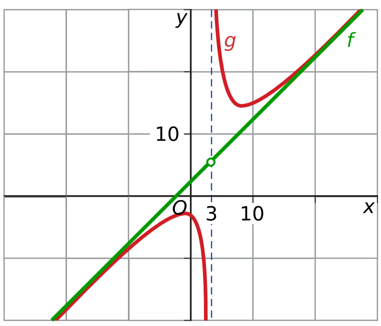
d Hoe kun je dit verklaren?

Uitleg

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ ziet er op het eerste gezicht uit als een rechte lijn. Toch zie je aan het functievoorschrift dat $x = 3$ geen functiewaarde kan hebben omdat delen door 0 geen uitkomst heeft.

Dat de grafiek lijkt op een rechte lijn wordt duidelijk als je het functievoorschrift herleidt: $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$ als $x \neq 3$.

De grafiek van deze functie is voor elke $x \neq 3$ gelijk aan de lijn $y = x + 3$. Alleen heeft de grafiek voor $x = 3$ een gaatje, een perforatie. Hierdoor is de functie niet continu op $\mathbb{R}$. De grafiek van een continue functie kun je namelijk als één vloeiende lijn tekenen en dat is nu niet het geval.



Figuur 2

Bekijk je de grafiek van $g(x) = \frac{x^2+9}{x-3}$, dan zie je iets heel anders. Ook deze functie bestaat voor elke $x \neq 3$, maar de grafiek heeft voor $x = 3$ een verticale asymptoot. Ook deze functie is niet continu omdat je de grafiek niet als één vloeiende kromme lijn kunt tekenen.

Voor de functie f geldt $\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} f(x) = 6$. Als je nu afspreekt dat $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{voor} \quad x \neq 3 \\ 6 & \text{voor} \quad x = 3 \end{cases}$,

dan heb je functie f continu gemaakt. Bij functie g is zoiets niet mogelijk.

Opgave 1

Lees in de **Uitleg** na wanneer een functie continu is en wat er verstaan wordt onder perforatie. In de figuur zie je de (groene) grafiek van functie $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$.

a Ga na dat er inderdaad geen functiewaarde $f(3)$ bestaat.

b Ga met behulp van een tabel na dat $\lim_{x \downarrow 3} f(x) = 6$ en $\lim_{x \uparrow 3} f(x) = 6$. Hoe maak je deze functie continu?

Bekijk de grafiek van functie g.

c Waarom is er nu geen sprake van een perforatie, maar heeft de grafiek een verticale asymptoot? Gebruik limieten in je antwoord.

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$.

a Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine in de standaardinstellingen van het venster.

b Welke waarden van x hebben geen bijbehorende functiewaarde?

c Toch heeft de grafiek maar één verticale asymptoot. Welke limieten horen daar bij?

d Laat zien, door het functievoorschrift te herleiden, waarom de grafiek maar één verticale asymptoot heeft.

e Schrijf het domein en het bereik van f op.

f De grafiek van f heeft een perforatie. Door welke afspraak kun je deze functie voor $x = 3$ continu maken?

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = |x|$.

a Is deze functie continu voor $x = 0$?

Bekijk nu de functie $g(x) = \frac{|x|}{x}$.

b Is deze functie continu voor $x = 0$?

c Maak de grafiek van g op de grafische rekenmachine en licht toe waarom hij er zo uitziet.

d Heeft de grafiek van g een perforatie?

Theorie en voorbeelden

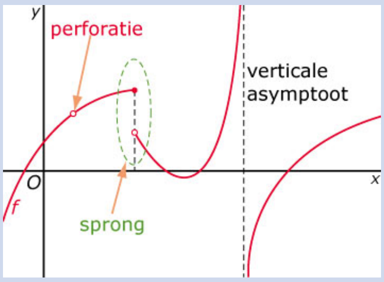
Om te onthouden

Een functie is **continu** voor $x = a$ als $f(a)$ een waarde heeft en $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a)$.

Dit betekent dat als je $x = a$ vanaf links benadert, je dezelfde functiewaarde benadert als wanneer je $x = a$ van rechts benadert en dat die functiewaarde gelijk is aan $f(a)$.

Als die functiewaarde (limietwaarde) *niet* gelijk is aan $f(a)$, dan heeft de grafiek een **perforatie**.

Als de linker limiet en de rechter limiet (beide voor x nadert a) van elkaar verschillen, dan zit er een **sprong** in de grafiek. Die sprong kan een verticale asymptoot zijn.



Figuur 3

Als de linker limiet en de rechter limiet beide op ∞ of $-\infty$ uitkomen (x nadert a), is er sprake van een verticale asymptoot.
Omdat een functiewaarde ‘niet $\pm\infty$ kan zijn’, is de functie daar niet continu.

Bij de karakteristieken van een functie horen ook de perforaties en eventuele sprongen in de grafiek.

Voorbeeld 1

De functie $f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x^2+2x}$ heeft twee x-waarden waar geen functiewaarde bij hoort. Welke limieten horen bij deze functie en wat betekent dit voor de grafiek van f?

Antwoord

Aangezien je niet door 0 kunt delen, is dit het geval als $x^2 + 2x = 0$ en dus als $x = -2 \vee x = 0$.

Voor $x = -2$ geldt $\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \lim_{x \downarrow -2} f(x) = 3$.

Voor $x = 0$ geldt $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -\infty$.

Bij $x = -2$ heeft de grafiek een perforatie. Bij $x = 0$ heeft de grafiek een verticale asymptoot.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x^2+2x}$.

a Bereken zelf de bijbehorende limieten.

b Uit de limieten volgt dat bij $x = -2$ een perforatie in de grafiek zit. Hoe kun je de grafiek bij $x = -2$ continu maken?

c Schrijf het domein en het bereik van f op. Ga uit van het gegeven functievoorschrift.

Opgave 5

Bepaal alle karakteristieken van de functie f met $f(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-9)}{x^2-2x}$.

Opgave 6

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|}}$.

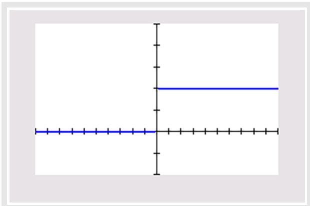
a Bereken $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$.

b Heeft deze functie een perforatie voor $x = 0$?

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq 3$.

Voorbeeld 2

Dit is een grafiek van de functie $f(x) = \frac{|x|+x}{x}$. Leg uit waarom de grafiek er zo uitziet en verklaar de sprong in de grafiek bij $x = 0$.



Figuur 4

Antwoord

Je kunt het functievoorschrift herleiden tot

$$f(x) = \frac{|x|+x}{x} = \begin{cases} \frac{x+x}{x} = 2 & \text{voor} \quad x > 0 \\ \frac{-x+x}{x} = 0 & \text{voor} \quad x < 0 \end{cases}$$

Rechts van $x = 0$ (dus voor positieve x-waarden) is de grafiek de lijn $y = 2$. Links van $x = 0$ (dus voor negatieve x-waarden) is de grafiek de lijn $y = 0$.

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{|x|+1}{x}$.

a Herleid dit functievoorschrift op dezelfde manier als in het voorbeeld.

b Heeft de grafiek van f een sprong?

c Welke twee horizontale asymptoten heeft de grafiek van f?

Opgave 8

De functie f is gegeven door: $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{voor} \quad x > 0 \\ x^2 + x & \text{voor} \quad x \leq 0 \end{cases}$.

a Bereken de linker limiet en de rechter limiet voor x nadert 0 van deze functie.

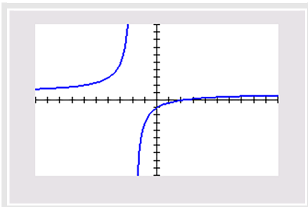
b Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

c Schrijf het domein en het bereik van f op.

Verwerken

Opgave 9

Je ziet de grafiek van de functie f met functievoorschrift $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$.



Figuur 5

a Schrijf het domein van f op.

b Hoe komt het dat je alleen bij $x = -2$ een verticale asymptoot ziet en bij $x = 2$ niet? Gebruik limieten in je antwoord.

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van deze functie? Geef de bijbehorende limieten.

d Welk bereik heeft deze functie?

Opgave 10

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{|2x|+3x}{x}$.

a Laat zien dat de grafiek van f een sprong maakt voor $x = 0$ door het functievoorschrift te herleiden.

b Deze functie snijdt van de lijn $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$ een lijnstuk AB af. Bereken de lengte van lijnstuk AB.

Opgave 11

De functie f heeft als voorschrift $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{voor} \quad x < -2 \\ \frac{1}{4}x & \text{voor} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} & \text{voor} \quad x > 2 \end{cases}$.

a Licht toe dat deze functie voor elke waarde van x continu is. Gebruik daarbij limieten.

b Schrijf het domein en het bereik van f op.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 0{,}125$.

Opgave 12

De grafiek van $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ heeft een verticale asymptoot voor $x = 0$. Daarom wordt een nieuwe functie g gedefinieerd door: $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{voor} \quad x \leq -1 \\ x^2 + px + q & \text{voor} \quad -1 < x < 1 \\ f(x) & \text{voor} \quad x \geq 1 \end{cases}$

De waarden van de onbekende p en q worden zo gekozen, dat de grafiek geen perforaties of sprongen heeft.

Welke waarden voor p en q moeten worden gekozen? Geef een uitgebreide toelichting.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2+10x-12}{x-a}$.

Voor welke waarden van a heeft de grafiek van f een perforatie?

Toepassen

Opgave 14: Gas afbranden

In de jaren zeventig van de vorige eeuw werd in Nederland volop gas verstookt. In een gebied met veel tuinders werd vooral voor hen een gunstige prijs per m^3 gehanteerd (alle bedragen zijn omgerekend naar euro):

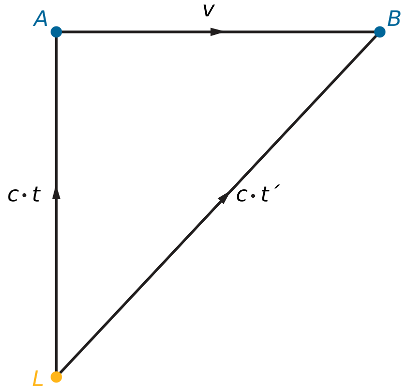
- Voor kleinverbruik (tot 600 m^3 per jaar) werd € 20,00 per jaar plus € 0,13 per m^3 gerekend.
- Voor grootverbruik (vanaf 600 m^3 per jaar) werd € 40,00 per jaar plus € 0,08 per m^3 gerekend.

a Was de bijbehorende grafiek van de gasprijs P (in euro) afhankelijk van het gasverbruik x (in m^3) continu?

b Vanaf welk verbruik was het voor een kleinverbruiker gunstiger om in het grootverbruikerstarief te vallen?

Opgave 15: Bewegende waarnemer

Gegeven zijn twee waarnemers A en B. Ze bevinden zich op dezelfde plaats. Op het tijdstip dat een lichtbron L licht uitzendt, begint B zich met een constante snelheid v, loodrecht op AL van A af te bewegen. Zie de figuur. Noem t de tijd die het licht nodig heeft om A te bereiken en t' de tijd om B te bereiken. Noem de lichtsnelheid c.



Figuur 6

a Toon aan dat $\frac{t'}{t} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Noem deze verhouding $f(v)$.

b Bepaal het domein van f.

c Welke waarde nadert $f(v)$ als v de lichtsnelheid nadert?

d Bereken $f(0)$ en geef aan wat dit voor de situatie betekent.

e Voor welke snelheid verloopt de tijd van A half zo snel als voor B?

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x^2-2}$.

a Laat met behulp van limieten zien dat de grafiek van f precies één verticale asymptoot heeft.

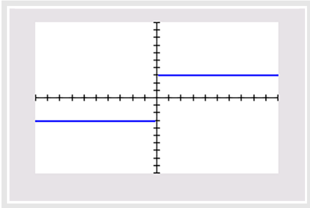
b Bepaal de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

c Schrijf het domein en het bereik van f op.

d Los algebraïsch op: $f(x) \leq -x$.

Opgave 17

Je ziet de grafiek van de functie g met $g(x) = \frac{|3x|}{x}$. De grafiek heeft een sprong.



Figuur 7

a Laat zien waarom dit zo is door het functievoorschrift te herschrijven.

Om deze functie continu te maken wordt het functievoorschrift aangepast. Er wordt een nieuwe functie h gedefinieerd door:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{voor} \quad x < -1 \\ px^2 + q & \text{voor} \quad -1 \leq x \leq 2 \\ g(x) & \text{voor} \quad x > 2 \end{cases}$$

De waarden voor de onbekende p en q worden zo gekozen dat h een continue functie is.

b Bereken p en q.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.