3.3 Limieten

Inleiding

Een limiet is een grenswaarde, een waarde die alleen wordt benaderd, maar nooit echt gehaald. Hoewel...

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat een limiet precies is en hoe je deze kunt berekenen;
- welke notaties er bij het berekenen van limieten worden gebruikt;
- op welke manier je limieten kunt gebruiken om de asymptoten van een functie te bepalen.

Voorkennis

- werken met functies (ook met de grafische rekenmachine) en de bijbehorende notaties gebruiken;
- nulpunten, toppen en asymptoten als karakteristieken van een functie berekenen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

De functie $f(x) = \frac{1}{x}$ heeft twee asymptoten.

a Welk getal benadert $f(x)$ als x hele grote waarden gaat aannemen? Wordt dit getal ooit bereikt?

b Welke waarde benaderen de functiewaarden als x groot negatief wordt?

c Welke functiewaarden vind je als x dicht bij 0 komt, maar positief is?

d Welke functiewaarden vind je als x dicht bij 0 komt, maar negatief is?

Uitleg

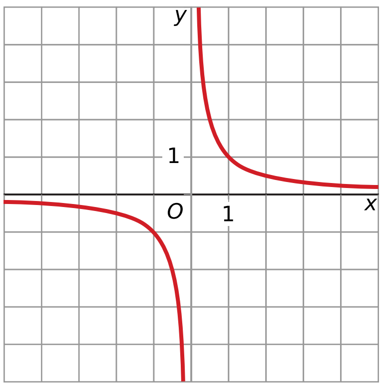
Als je de functie f met $f(x) = \frac{1}{x}$ nader bekijkt, dan zie je dat:

- voor hele grote positieve waarden van x de functiewaarden 0 naderen;
- voor hele grote negatieve waarden van x de functiewaarden 0 naderen.

Het getal 0 is een grenswaarde die weliswaar nooit wordt bereikt, maar waar de functiewaarden wel steeds dichterbij komen te liggen als x alsmaar groter wordt. Je noemt het getal 0 wel de limiet van deze functiewaarden als x naar oneindig gaat. Dit noteer je als $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Het symbool ∞ betekent 'oneindig'.

Zo geldt ook: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.



Figuur 2

Het gevolg van deze limieten is de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

Verder is er ook iets bijzonders met deze functie als x het getal 0 nadert, namelijk:

- voor positieve waarden van x steeds dichter bij 0 worden de functiewaarden steeds grotere positieve getallen;
- voor negatieve waarden van x steeds dichter bij 0 worden de functiewaarden steeds grotere negatieve getallen.

In deze gevallen schrijf je $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Let op de pijltjes.

Het gevolg van deze limieten is de verticale asymptoot van de grafiek van f.

Opgave 1

Neem de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

a Maak een schets van de grafiek van f. Welke karakteristieken heeft deze functie?

b Welke twee limieten horen er bij de horizontale asymptoot?

c Welke twee limieten horen er bij de verticale asymptoot?

Bekijk de functies $g(x) = \frac{1}{x^3}$ en $h(x) = \frac{1}{x^4}$.

d Beantwoord voor deze functies dezelfde vragen. Ontdek je een patroon?

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = 2 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

a Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster.

b Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Welke limieten horen daar bij?

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van f? Welke limieten horen daar bij?

d Schrijf het domein en het bereik van f op.

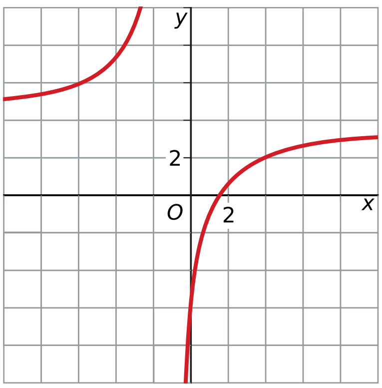
Opgave 3

Je ziet de grafiek van functie f met $f(x) = \frac{4x-6}{x+1}$.

a Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Welke twee limieten horen er bij?

b Welke vergelijking heeft de horizontale asymptoot? Welke twee limieten horen er bij?

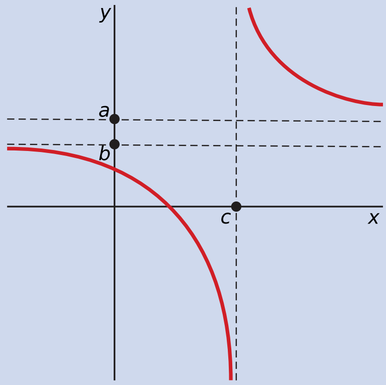
c Schrijf het domein en het bereik van f op.



Figuur 3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 4

Als de functiewaarden $f(x)$ van een functie f voor steeds grotere positieve waarden van x een getal a steeds dichter benaderen, dan heet a de **limiet** van f als x **oneindig** nadert. Je schrijft dit zo: $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$.

Als de functiewaarden $f(x)$ van een functie f voor steeds grotere negatieve waarden van x een getal b steeds dichter benaderen, dan schrijf je: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

In dit geval zijn de lijnen $y = a$ en $y = b$ horizontale asymptoten van de grafiek van f. Vaak zijn a en b gelijk, maar niet altijd. Ook kunnen deze limieten $\pm\infty$ naderen. Soms is er dan sprake van een **scheve asymptoot**. Dat is een rechte lijn $y = ax + b$ met $a \neq 0$ die de grafiek van f steeds dichter benadert naarmate x steeds groter of kleiner wordt. Bekijk de scheve asymptoot in **Voorbeeld 2**.

Als de functiewaarden $f(x)$ van een functie f steeds grotere positieve onbeperkte waarden aannemen (als x een getal c steeds dichter benadert) dan schrijf je:

$\lim_{x \downarrow c} f(x) = \infty$ als $x > c$ en

$\lim_{x \uparrow c} f(x) = -\infty$ als $x < c$.

De eerste van deze twee limieten noem je wel de **rechter limiet** voor x nadert c. Dit wordt ook wel uitgedrukt als: x nadert c 'van boven'. De tweede limiet is dan de **linker limiet** voor x nadert c 'van onderen'. Is er sprake van steeds grotere negatieve onbeperkte functiewaarden, dan schrijf je $-\infty$ in plaats van ∞. Nu is de lijn $x = c$ een verticale asymptoot van functie f.

Bekijk de applet.

Bij functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{x^n}$ met $n = 1,2,3,4,...$ zijn de limieten bekend. Onthoud:

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$

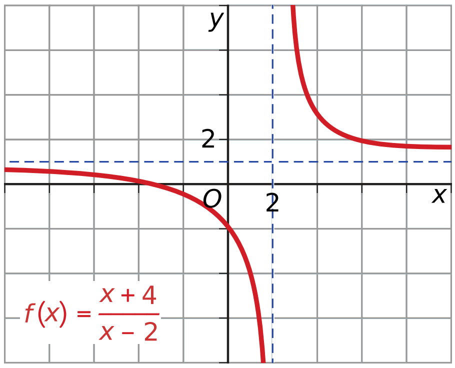
$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$ als n even is

$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ als n oneven is

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De grafiek van $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ heeft twee asymptoten, namelijk $y = 1$ en $x = 2$. Welke limieten horen bij deze functie en hoe kun je die vinden zonder naar de grafiek te kijken?



Figuur 5

Antwoord

Aangezien je niet door 0 kunt delen, is er iets bijzonders als $x - 2 = 0$ en dus als $x = 2$.
$f(2)$ bestaat niet, maar x-waarden vlak bij 2 kun je wel invullen:
$f(2{,}001) = 6001$ en $f(2{,}0001) = 60001$.

Dus de rechter limiet is $\lim_{x \downarrow 2} \frac{x+4}{x-2} = \infty$.

Ook geldt:
$f(1{,}999) = -5999$ en $f(1{,}9999) = -59999$.

De linker limiet is $\lim_{x \uparrow 2} \frac{x+4}{x-2} = -\infty$.

Voor de limieten bij de horizontale asymptoot ga je anders te werk:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+4}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Door zowel de teller als de noemer van de breuk te delen door x ontstaat een uitdrukking waarin naast getallen alleen vormen zoals $\frac{4}{x}$ en $\frac{2}{x}$ voorkomen. Dergelijke vormen zijn veelvouden van $\frac{1}{x}$ en daarom naderen ze 0 als x groter wordt.

De limiet voor $x \to -\infty$ bereken je op dezelfde manier.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{3x}{1-2x}$.

a Welke verticale asymptoot heeft deze functie?

b Welke limieten horen bij deze verticale asymptoot?

c Welk nulpunt heeft de grafiek van f?

d Onderzoek of de grafiek van f een horizontale asymptoot heeft.

e Laat zien hoe je $\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{1-2x}$ berekent.

f Hoeveel is $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{1-2x}$?

Opgave 5

Bereken de limieten.

a $\lim_{x \to \infty} \frac{4-x}{2x+1}$

b $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+6}{5x-1}$

c $\lim_{x \downarrow 2} \frac{5x}{3x-6}$

d $\lim_{x \downarrow 2} \frac{x-2}{3x-6}$

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x}{x^2-100}$.

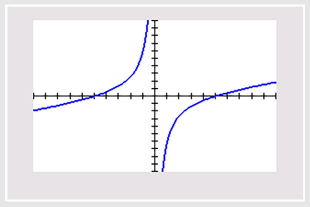
a Welke drie asymptoten heeft de grafiek van f?

Bij de horizontale asymptoot horen de limieten $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2-100}$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x}{x^2-100}$.

b Laat zien hoe je deze limieten kunt berekenen door teller en noemer van het functievoorschrift te delen door x^2.

Voorbeeld 2

Dit is een grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2-100}{4x}$. Welke asymptoten heeft deze functie? Bepaal de bijbehorende limieten.



Figuur 6

Antwoord

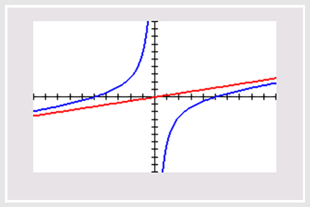
De verticale asymptoot vind je uit $4x = 0$. De bijbehorende limiet is daarom de lijn $x = 0$. Bepaal met behulp van tabellen de linker en de rechter limiet die hierbij horen.

Voor de horizontale asymptoot kun je de limieten $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-100}{4x}$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-100}{4x}$ bekijken.

Nu is $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-100}{4x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{4x} - \frac{100}{4x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{4}x - \frac{25}{x}\right)$.

Deze limiet komt niet op een getal uit. Naarmate x blijft toenemen, wordt ook de uitkomst van de limiet groter. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{25}{x} = 0$, dus je kunt zeggen dat als $x \to \infty$, dan geldt $f(x) \to \frac{1}{4}x$.

Als je de lijn $y = \frac{1}{4}x$ bij de grafiek van f intekent, zie je dat de grafiek van f deze lijn steeds dichter benadert naarmate $x \to \infty$. Hetzelfde geldt voor $x \to -\infty$. De lijn $y = \frac{1}{4}x$ is de scheve asymptoot van de grafiek van f.



Figuur 7

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2-1}{x}$.

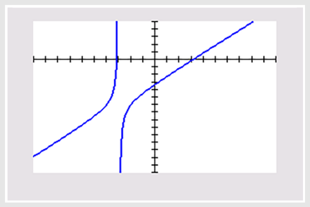
a Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van f?

Om een horizontale asymptoot te bepalen, moet je de limieten $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2-1}{x}$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-1}{x}$ berekenen.

b Laat zien dat deze limieten niet op een getal uitkomen.

Opgave 8

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2-10}{x+3}$.



Figuur 8

a Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van f?

Om een horizontale asymptoot te bepalen, moet je de limieten $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-10}{x+3}$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-10}{x+3}$ berekenen.

b Laat zien dat deze limieten niet op een getal uitkomen.

c Laat zien dat je het functievoorschrift kunt herleiden tot $f(x) = \frac{x^2-10}{x+3} = x - 3 - \frac{1}{x+3}$.

d Welke vergelijking heeft de scheve asymptoot van de grafiek van f?

Verwerken

Opgave 9

Bereken de limieten.

a $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{3x+4}$

b $\lim_{x \uparrow 2} \frac{x-3}{2x+4}$

c $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-3x}{x^3+9x}$

Opgave 10

Bepaal de horizontale en de verticale asymptoten van de functies en schrijf de bijbehorende limieten op.

a $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

b $g(x) = \frac{x}{x^2-x-2}$

Opgave 11

Bereken $\lim_{x \downarrow 3} \frac{x^3-3x^2}{x^3-9x}$.

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1+x^2}{2x}$.

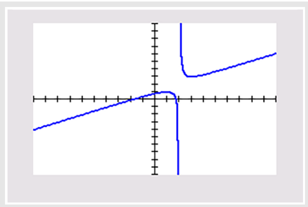
a Bepaal de verticale asymptoot van de grafiek van f met de bijbehorende limieten.

b Bepaal de andere karakteristieken van f en maak de grafiek.

Opgave 13

Je ziet de grafiek van $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$.

Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot van deze grafiek.



Figuur 9

Toepassen

Opgave 14: Parallelschakeling

In huis kun je meerdere elektrische apparaten tegelijk aansluiten. Dit is mogelijk doordat deze apparaten parallel zijn geschakeld. Bij een parallelschakeling lopen er vanuit de stroombron aftakkingen naar alle losse apparaten en weer terug.

Bij een parallelschakeling van twee weerstanden met grootte R_1 (in Ω) en R_2 (in Ω) is de substitutieweerstand (de totale weerstand) R_s te berekenen met de formule $\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

a Toon aan dat $R_s = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}$.

b Bepaal $\lim_{R_2 \to \infty} R_s$ en leg uit welke natuurkundige betekenis de uitkomst heeft.

c Bepaal $\lim_{R_2 \downarrow 0} R_s$ en leg uit welke natuurkundige betekenis de uitkomst heeft.

Opgave 15: Limiet en Entierfunctie

Gegeven is de functie f met $f(x) = (-1)^{\text{int}(x)}$. Hierin komt de uitdrukking $\text{int}(x)$ voor. De integer-functie $g(x) = \text{int}(x)$ rondt getallen naar beneden af naar het dichtsbijzijnde gehele getal. Zo is $\text{int}(3{,}14) = 3$ en $\text{int}(-3{,}14) = -4$.

a Teken de grafiek van f, zonder de grafische rekenmachine te gebruiken.

b Bestaat $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$? Verklaar waarom wel/niet.

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{6+x}{2x-1}$.

a Bepaal de verticale asymptoot van deze functie en schrijf de bijbehorende limieten op.

b Bereken het nulpunt van de grafiek van f.

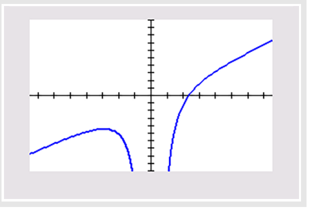
c Bereken met behulp van limieten de vergelijking van de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

d Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 17

Hier zie je de grafiek van de functie g met $g(x) = \frac{3x^3-300}{2x^2}$. De grafiek lijkt een scheve asymptoot te hebben.

Stel een vergelijking van die scheve asymptoot op en schrijf de bijbehorende limieten op.



Figuur 10

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.