3.2 Asymptoten

Inleiding

Vooral als je in een functievoorschrift breuken aantreft waarbij de variabele (ook) in de noemer voorkomt, krijg je te maken met problemen rond het delen door 0 of met situaties waarin voor grote waarden de teller en de noemer wel heel groot worden, maar de breuk zelf niet. Dan krijg je te maken met zogenaamde 'asymptoten'. Dat zijn lijnen die de grafiek van de functie steeds meer benaderen, maar waar die grafiek nooit mee samenvalt.

$$\frac{a}{0} = ?$$

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat asymptoten zijn;
- op welke manier je de asymptoten van een functie kunt bepalen.

Voorkennis

- werken met functies (ook met de grafische rekenmachine) en de bijbehorende notaties gebruiken;
- nulpunten en toppen als karakteristieken van een functie berekenen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

De huurprijs van een kopieerapparaat bedraagt € 250,00 per maand. Op school staat zo'n apparaat voor de leerlingen. Het maken van een kopie kost de school € 0,06. De school wil geen winst maken of verlies draaien op het kopieerapparaat en wil zo een prijs per kopie voor de leerlingen instellen.

a Geef een formule voor de prijs per kopie P voor de leerlingen als functie van het aantal kopieën a.

b Welke waarde benaderen de functiewaarden als a heel groot wordt?

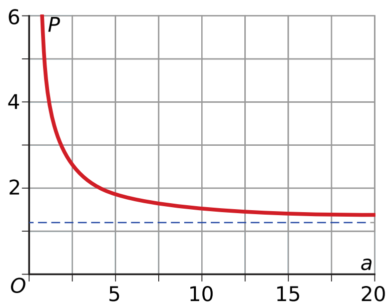
c En als a dicht bij 0 komt?

Uitleg

Voor een rit in een taxi betaal je:

- voorrijkosten van € 3,20
- € 1,20 per gereden kilometer.

De prijs P per gereden km hangt af van het aantal gereden kilometers a. Er geldt: $P = 1{,}20 + \frac{3{,}20}{a}$.



Figuur 2

De grafiek van deze functie heeft geen nulpunten of extremen, maar wel geldt:

- Als a heel groot wordt, benaderen de functiewaarden het getal 1,20. Je ziet dat als je een tabel bij de functie maakt. Dit betekent dat de grafiek steeds dichter bij de lijn $P = 1{,}20$ komt te liggen. Deze lijn heet de horizontale asymptoot van de grafiek van P.
- Als a dicht bij 0 komt, worden de functiewaarden steeds groter:
  Het getal 0 mag je niet voor a invullen, want dan moet je delen door 0 en dat kan niet. Dit betekent dat de grafiek steeds dichter bij de lijn $a = 0$ (de verticale as) komt te liggen. Dit is de verticale asymptoot van de grafiek van P.

Als je de grafiek van de functie tekent, zorg je ervoor dat ook dit soort karakteristiek gedrag zichtbaar wordt, net als nulpunten en toppen.

Opgave 1

Van een bepaald type kopieerapparaat worden de kosten per kopie in een maand gegeven door $K(a) = \frac{200}{a} + 0{,}075$. Hierin is a het aantal kopieën per maand en K zijn de kosten in euro.

a Bereken de kosten per kopie als er 10000 kopieën per maand met deze machine worden gemaakt.

b Welke waarde benaderen de kosten per kopie als het aantal kopieën heel erg groot is?

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van K?

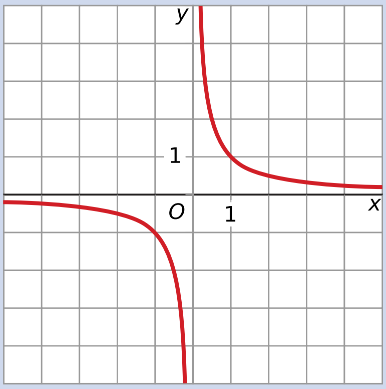
d Als er in een bepaalde maand geen kopieën worden gemaakt, kun je niet spreken van de kosten per kopie. Het minimale aantal kopieën waarbij dit nog wel kan, is 1.
Hoeveel bedragen de kosten per kopie maximaal?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij functies komen regelmatig asymptoten voor. Dat zijn lijnen waar de grafiek steeds dichter in de buurt komt naarmate je verder van de oorsprong van het assenstelsel komt. Vooral een **verticale asymptoot** kun je vaak goed in het functievoorschrift herkennen: een invoerwaarde waarbij je door 0 moet delen, veroorzaakt vaak een asymptoot. Een **horizontale asymptoot** ontstaat als de functiewaarden een vast getal naderen naarmate de invoerwaarden heel groot of heel klein (erg negatief) worden.

De functie f met voorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ (zie de grafiek) is de basisfunctie van een functie met asymptoten. Je ziet er hier de grafiek van. Deze grafiek heeft:



Figuur 3

- als horizontale asymptoot de lijn $y = 0$, want voor grote en kleine (erg negatieve) waarden van x naderen de functiewaarden steeds dichter 0;
- als verticale asymptoot de lijn $x = 0$, want dit getal heeft geen functiewaarde (je kunt niet door 0 delen) en vlak in de buurt van 0 worden de functiewaarden heel groot of heel klein (erg negatief).

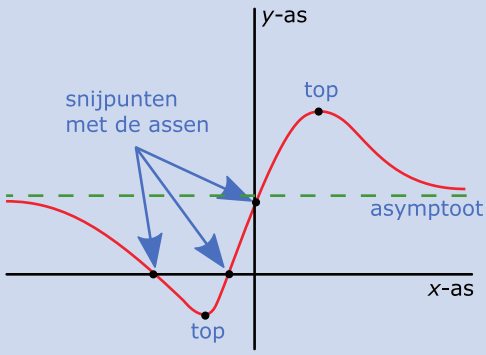
Het domein van f schrijf je als $D_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.

Het bereik is $B_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.

Het teken $\cup$ betekent dat het gaat om alle getallen van de twee intervallen samen.

Als je de grafiek van een functie f goed in beeld hebt, zijn alle **karakteristieken** zichtbaar (op het gewenste domein). Dat kunnen zijn:

- de **snijpunten met de assen**;
- de **asymptoten**;
- de **toppen**, de punten met (lokale) maxima en minima.



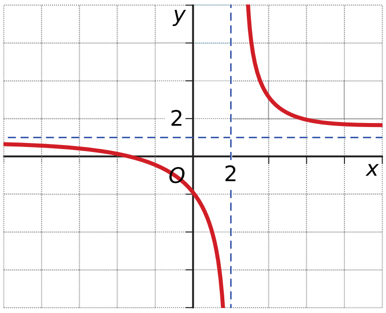
Figuur 4

Bij een gebroken functie van de vorm $y = \frac{a}{x}$ is er een **omgekeerd evenredig** verband tussen y en x. Deze formule kun je ook schrijven als $xy = a$; dit betekent dat het product van x en y altijd gelijk is aan a.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

De grafiek van $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ heeft twee asymptoten. Welke twee?
Schrijf het domein en het bereik van f op.



Figuur 5

Antwoord

Aangezien je niet door 0 kunt delen, is er iets bijzonders als $x-2=0$ en dus als $x=2$.
$f(2)$ bestaat niet, maar x-waarden vlak bij 2 kun je wel invullen:

$$f(2{,}001) = 6001$$
$$f(2{,}0001) = 60001$$

$$f(1{,}999) = -5999$$
$$f(1{,}9999) = -59999$$

De grafiek van f komt dicht langs de lijn $x=2$ te lopen: $x=2$ is de vergelijking van de verticale asymptoot.

Voor de horizontale asymptoot ga je anders te werk: kies x-waarden als 1000, 10000, 100000 enzovoort. Bereken de bijbehorende functiewaarden. Doe hetzelfde met -1000, -10000, -100000, enzovoort. Je ziet dan dat de functiewaarden in de buurt van $y=1$ komen te liggen. Hoe verder je van 0 af zit, hoe beter die benadering. De lijn $y=1$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

Het domein van f is: $\langle \leftarrow, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$. Het bereik van f is: $\langle \leftarrow, 1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$.

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4}{x} + 2$.

a Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster.

b Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Hoe zie je dat aan de tabel van f?

c Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?

d Welk getal naderen de functiewaarden als x oneindig negatief wordt?

e Welke vergelijking heeft de horizontale asymptoot?

f Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 3

Je ziet de grafiek van $f(x) = \frac{4}{x+2}$.

a Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster. Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek?

b Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?

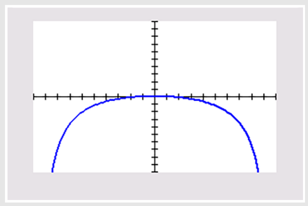
c Welk getal naderen de functiewaarden als x oneindig negatief wordt?

d Welke vergelijking heeft de horizontale asymptoot?

e Schrijf het domein en het bereik van f op.

Voorbeeld 2

Je ziet de grafiek van $f(x) = \frac{4x^2-16}{x^2-100}$ met de standaard vensterinstellingen van de grafische rekenmachine. Bepaal alle karakteristieken en het bereik van f.



Figuur 6

Antwoord

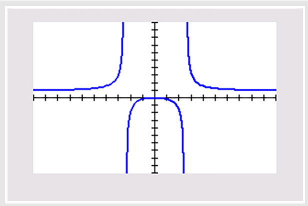
Op grond van dit plaatje zou je verkeerde conclusies kunnen trekken. Bijvoorbeeld dat het maximum $f(0) = 0$ is en dat de grafiek een soort afgeplatte bergparabool is. En dat is niet goed.

Kijk eerst of er nulpunten en asymptoten zijn:

- $f(x) = 0$ levert op: $\frac{4x^2-16}{x^2-100} = 0$ en dus: $4x^2 - 16 = 0$. Er zijn daarom precies twee nulpunten, namelijk $x = -2$ en $x = 2$.
- Je deelt door $x^2 - 100$ en dus ontstaan er problemen als $x^2 - 100 = 0$. Dit betekent dat $x = 10$ en $x = -10$ wellicht verticale asymptoten zijn. Door getallen in de buurt van 10 dan wel -10 in te vullen, merk je dat dit echt twee verticale asymptoten zijn.
- Door grote of kleine (dus negatieve) getallen in te vullen naderen de functiewaarden de 4. Dus $y = 4$ is de horizontale asymptoot.

Pas nu de vensterinstellingen aan en breng alle karakteristieken van de grafiek in beeld. Bij $x = 0$ blijkt een maximum te zitten: $f(0) = 0{,}16$. (Laat je rekenmachine een maximum zoeken tussen bijvoorbeeld de nulpunten.)

Het bereik van f lees je uit de grafiek af, rekening houdend met het maximum en de horizontale asymptoot: $B_f = \langle \leftarrow; 0{,}16] \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$.



Figuur 7

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x-10}{x^2-25}$.

a Welk nulpunt heeft de grafiek van f?

b Welke verticale asymptoten heeft de grafiek van f?

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van f?

Je kunt de x-waarden van het venster instellen. De karakteristieken (de nulpunten, de asymptoten en de toppen) moeten zichtbaar worden.

d Welke vensterinstellingen laten alle karakteristieken zien, dus ook de twee extremen?

e Bepaal de extremen van deze functie op drie decimalen nauwkeurig.

f Schrijf domein en bereik van deze functie op.

Opgave 5

Gegeven is $g(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

a Waarom heeft deze functie geen verticale asymptoot?

b Welk nulpunt heeft de grafiek van g?

c Onderzoek of $g(x)$ een horizontale asymptoot heeft.

d Geef het domein en het bereik van g.

Verwerken

Opgave 6

Geef de asymptoten, het domein en bereik van de volgende functies.

a $f(x) = 4 - \frac{4}{x}$

b $g(x) = \frac{4-x}{x}$

c $h(x) = \frac{x}{x^2-4}$

d $k(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{x} + 5$.

a Geef de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f.

b Welke translatie moet je op de grafiek van f toepassen, zodat je een omgekeerd evenredig verband krijg?

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10x}{(x-20)^2}$.

a Bereken het nulpunt van deze functie.

b Welke asymptoten heeft deze functie?

c Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?

d Bepaal het bereik van f.

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2}{x^4+10}$.

a Bereken het nulpunt van de grafiek van deze functie.

b Welke asymptoten heeft deze functie?

c Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?

d Bepaal het bereik van f. Benader op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Voor de totale kosten TK bij de productie van een bepaald artikel geldt: $TK = 100 + 0{,}1q^2$ waarin TK in euro is en q het aantal exemplaren voorstelt.

a Bereken de gemiddelde kosten per exemplaar bij een productie van 120 stuks op twee decimalen nauwkeurig.

b Leg uit waarom de gemiddelde kosten het hellingsgetal is van de lijn door $(0,0)$ en (q,TK).

c Stel een voorschrift op voor de gemiddelde kosten per exemplaar (GK) als functie van q.

d Welke asymptoot heeft de functie GK? Schrijf het domein en het bereik van GK op. Rond af op twee decimalen.

Toepassen

Opgave 11: Lichaamstemperatuur

Als iemand in koud water met temperatuur T (in °C) terechtkomt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur is gedaald tot 30 °C ontstaat een levensbedreigende situatie. De tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30 °C wordt de overlevingstijd R (in minuten) genoemd.

Een persoon is te water geraakt in gewone kleding en een reddingsvest. In deze situatie geldt de volgende formule:

$R = 15 + \frac{7,2}{0,0785-0,0034T}$ met $R > 0$ en $T \geq 0$.

a Bij een watertemperatuur van 20 °C is de overlevingstijd groter dan bij een watertemperatuur van 10 °C. Bereken hoeveel keer zo groot.

b Bereken algebraïsch de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd vijf uur is. Rond daarna je antwoord af op een geheel aantal graden.

c Plot de grafiek R als functie van T. De grafiek heeft alleen betekenis links van de verticale asymptoot. Bereken de waarde van T die bij de verticale asymptoot hoort en leg uit wat de betekenis van de verticale asymptoot is voor de situatie van de te water geraakte persoon.

(naar: examen havo wiskunde B in 2011, eerste tijdvak))

Opgave 12: Toonhoogte

De hoogte van geluid wordt bepaald door de frequentie. Hoe hoger de frequentie, hoe kleiner de golflengte. De frequentie wordt uitgedrukt in Hertz (Hz) en geeft het aantal trillingen per seconde aan. Weet je de frequentie f, dan kun je de golflengte W berekenen: $W = \frac{330}{f}$.

W is in meters. Een geluidsinstallatie kan geluiden van 15 Hz tot 30000 Hz produceren.

a Is er een omgekeerd evenredig verband tussen W en f?

b Als je [15,30000] als domein kiest, welk bereik heeft W dan?

c Vleermuizen kunnen hoogfrequente geluiden horen, soms wel geluiden met een frequentie van 120000 Hz. Is dit een hoog of juist laag geluid?

d Welke golflengte heeft het?

e Mensen kunnen geluiden onder de 20 Hz nauwelijks horen. Gaat het dan om bassen of hoge tonen? Welke golflengte heeft zo'n geluid?

f Welke waarde benadert W als f heel groot wordt?

Testen

Opgave 13

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4+2x}{x-1}$.

a Bereken $f(100)$ en $f(-100)$ op vier decimalen nauwkeurig.

b Bereken de nulpunten van de grafiek van f.

c Breng de grafiek van f in beeld.

d Schrijf de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f op.

e Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 14

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die zaden nodig hebben om voor 50% te ontkiemen. Proefondervindelijk is een verband tussen temperatuur en kiemtijd gebleken. De kiemtijd K is geteld in dagen en de temperatuur T is gemeten in °C. Dit verband wordt gegeven door: $K = \frac{89}{T-2}$.

a Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen 10 dagen ontkiemd?

b Wat is een zinvol domein voor K als functie van T?

c Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

d Welk bereik hoort bij het gekozen domein?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.