2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Functies en grafieken**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- functie — invoerwaarde — functiewaarde — functievoorschrift
- domein — bereik — nulwaarden/nulpunten — extremen/toppen
- lineaire functie — absoluutfunctie — integerfunctie (entierfunctie) — familie van functies
- samengestelde functie en rekenschema — terugrekenschema en inverse functie
- transformaties — verschuiven (translatie) — lijnvermenigvuldiging

Activiteitenlijst

- functies herkennen — de notaties bij het functiebegrip gebruiken
- het domein en het bereik van een functie bepalen — de intervalnotatie gebruiken
- werken met lineaire functies, de absoluutfunctie en de integerfunctie
- samengestelde functies herkennen en er een rekenschema bij maken — de inverse van een functie opstellen
- transformaties herkennen en uitvoeren

Achtergronden

René Descartes (1596—1650) – een Franse geleerde die een groot deel van zijn leven in De Nederlanden woonde – bedacht dat je lijnen en krommen kunt beschrijven met formules in x en y als je een assenstelsel invoert. Maar in die tijd werden deze lijnen en krommen als statische meetkundige objecten beschouwd, waaraan je, door ze in algebraïsche taal om te vormen, gemakkelijk kunt rekenen.

Figuur 1

Pas nadat **Isaac Newton (1642—1727)** de natuurkundige bewegingswetten in wiskunde omzette, werden formules gebruikt om verbanden tussen variabelen te beschrijven. Daarmee ontstond langzamerhand het functiebegrip: bij een bepaald tijdstip hoorde een bepaalde afgelegde afstand, die afstand was een functie van de tijd.

De wiskundige **Leonhard Euler (1707—1783)** voerde de notatie $f(x)$ in. In 1748 schreef Euler het boek ‘Introductio in analysin infinitorum’, waarin de fundamenten van de analyse van functies systematisch uiteen werden gezet. Daarmee is hij de grondlegger van de functietheorie.

Testen

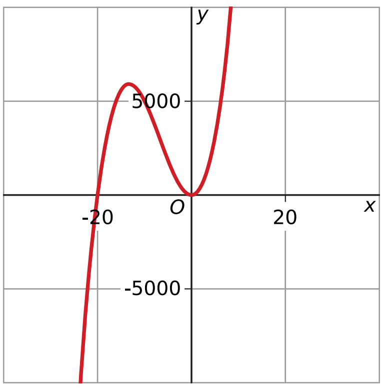
Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x^2(x+20)$ en $g(x) = 50x^2$. Je ziet de grafiek van f.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f en g met de x-as.

b Kies een vensterinstelling waarmee je hetzelfde beeld krijgt als de gegeven grafiek. Bereken de snijpunten van de grafieken van f en g.

c Los op: $f(x) < g(x)$.



Figuur 2

Opgave 2

Bereken bij de functies eerst de nulpunten. Bepaal vervolgens het domein en bereik.

a $f(x) = x^2(x^2 - 400)$

b $g(x) = \sqrt{20 - x} - 40$

Opgave 3

Los de vergelijkingen op.

a $|4x - 5| = 20$

b $|x^2 - 5x| = 6$

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{4x - 12}$.

a Maak een rekenschema bij deze samengestelde functie. Laat twee mogelijkheden zien.

b Geef het domein en bereik van f.

c De grafiek van deze functie kan door transformatie ontstaan uit die van $g(x) = \sqrt{x}$. Welke transformaties moet je dan toepassen?

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}25(x - 10)^4 - 16$.

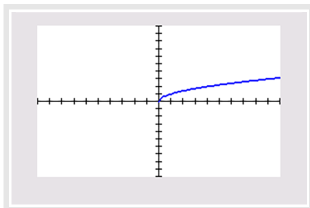
a Door welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^4$?

b Bepaal de top en de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.

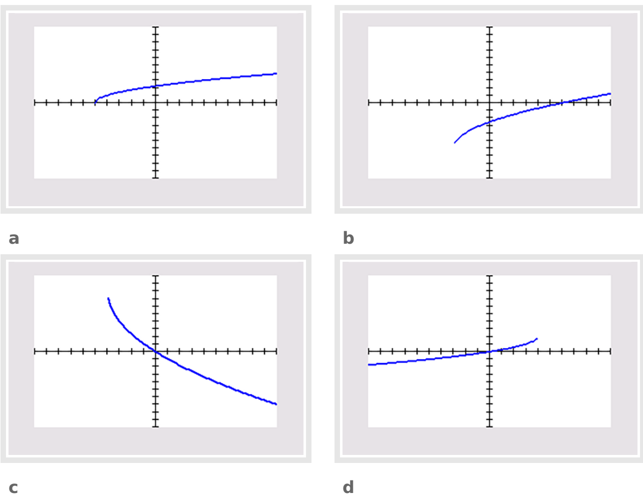
c Los algebraïsch op: $f(x) < 10$.

Opgave 6

Je ziet vier grafieken die zijn ontstaan door op de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ een of meer transformaties toe te passen. Steeds zijn de standaardinstellingen van het GR-venster gebruikt. Ga er van uit dat alle randpunten gehele coördinaten hebben.



Figuur 3



Figuur 4

Schrijf bij elke grafiek het juiste functievoorschrift op.

Opgave 7

Gegeven is dat de grafiek van de lineaire functie f door de punten $A(-2,8)$ en $B(6,80)$ gaat.

a Stel het functievoorschrift op van f.

b Voor welke lineaire functie g geldt dat $f(g(x)) = 2x + 4$?

c Geef het functievoorschrift van $f^{\text{inv}}(x)$.

Opgave 8

Gegeven is de functie $y(x) = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

a Maak een rekenschema bij deze samengestelde functie.

b Geef het domein en bereik van f.

c Heeft deze functie een inverse functie? Zo ja, stel het functievoorschrift op.

Toepassen

Opgave 9: Airco kaduuk

Door een technische storing in de airconditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte in de lucht tijdelijk af. De technische staf heeft het verloop van het zuurstofgehalte beschreven met de formule:

$$Z(t) = 200\left(1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{(t+10)^2}\right)$$

Hierin is t de tijd in minuten gerekend vanaf het moment dat de storing begon. Verder is Z het aantal cm^3 zuurstof per liter lucht op het tijdstip t. Op $t = 0$ is het zuurstofgehalte normaal.

a Bereken $Z(0)$. Plot de grafiek van $Z(t)$ voor $0 \leq t \leq 100$.

b Op welk tijdstip is het zuurstofgehalte minimaal?

c Schrijf het domein en het bereik van deze functie op.

d De medische staf vindt een zuurstofgehalte van 80% van het normale niveau, nog juist toelaatbaar. Bereken gedurende hoeveel minuten het zuurstofgehalte ontoelaatbaar laag is.

Examen

Opgave 10: Wortelfunctie met punt op grafiek

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$. T en S zijn de snijpunten van de grafiek van f met de x-as en de y-as.

a Bereken de coördinaten van T en S.

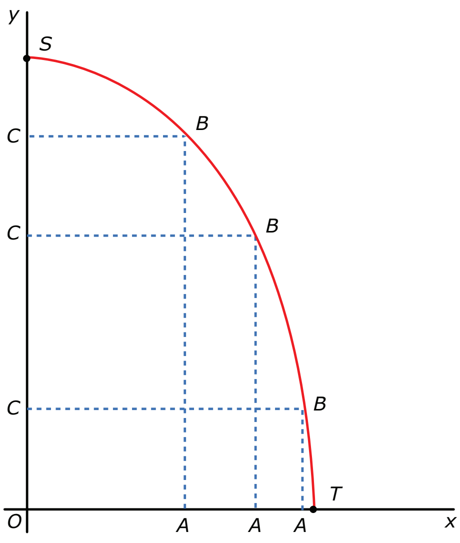
b Schrijf domein en bereik van f op.

In de figuur zie je hoe punt B de grafiek van f doorloopt tussen T en S. De punten A en C zijn steeds de projecties van B op respectievelijk de x-as en de y-as. Als B niet samenvalt met T of C is $OABC$ een rechthoek. Die rechthoek verandert voortdurend van vorm. Er is één plaats van B waarbij $OABC$ een vierkant is.

c Bereken de coördinaten van deze plaats.

Als B van T naar S beweegt over de grafiek van f, neemt de oppervlakte van $OABC$ eerst toe en later weer af. Iemand heeft het vermoeden dat de oppervlakte van $OABC$ maximaal is wanneer $OABC$ een vierkant is.

d Onderzoek of dit vermoeden juist is.



Figuur 5

(bron: examen wiskunde B havo 1991, tweede tijdvak)

Opgave 11: Verschoven functie

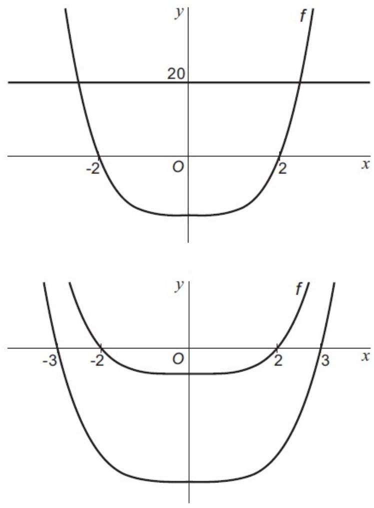
Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 16$. De grafiek van f snijdt de x-as in de punten (-2,0) en (2,0). In de bovenste figuur zijn de grafiek van f en de lijn $y = 20$ getekend.

a Bereken exact voor welke waarden van x de grafiek van f tussen de x-as en de lijn $y = 20$ ligt.

Door de grafiek van f omlaag te schuiven, veranderen de snijpunten met de x-as in de punten (-3,0) en (3,0). In de figuur zijn de grafiek van f en de verschoven grafiek getekend.

b Bereken hoeveel de grafiek van f omlaag is geschoven.

(bron: examen havo wiskunde B 2006 - II)



Figuur 6

Opgave 12: Verbindingslijnstukken

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ met $x > 0$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt (1,1). Bekijk voor $a > 1$ bij $x = a$ het verticale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g. Zie de eerste figuur.

a Bereken algebraïsch de exacte waarden van a waarvoor de lengte van het verticale verbindingslijnstuk $\frac{1}{4}$ is.

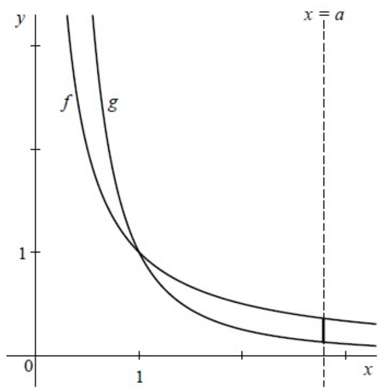
Bekijk voor $b < 1$ bij $y = b$ het horizontale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g. Zie de tweede figuur. De x-coördinaten van de eindpunten van dit verbindingslijnstuk zijn respectievelijk $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Voor een zekere waarde van b is de lengte van dit lijnstuk maximaal.

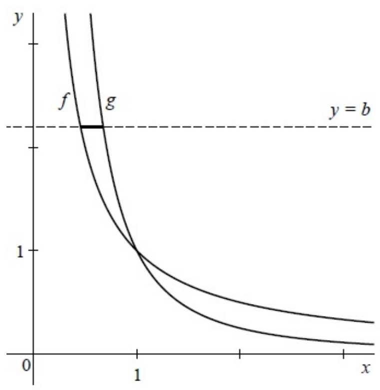
b Bepaal de maximale lengte van het horizontale verbindingslijnstuk.

(naar: examen vwo wiskunde B in 2011, tweede tijdvak)

figuur 1



figuur 2



Figuur 7