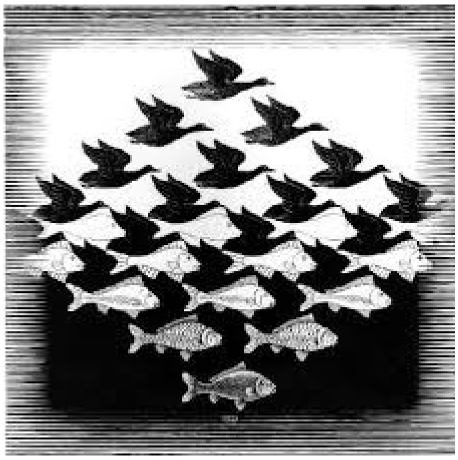
2.5 Transformaties

Inleiding

Veel functies ontstaan vanuit een eenvoudige standaardfunctie door in het voorschrift een getal op te tellen en/of met een getal te vermenigvuldigen. De grafieken van dergelijke functies lijken dan sterk op die van de gegeven functie. En de eigenschappen van die grafieken zijn uit die van de standaardfunctie af te leiden. Zo zijn alle functies van de vorm $y = ax + b$ af te leiden uit de standaardfunctie $y = x$. En dus hebben ze dezelfde grafiek, namelijk een rechte lijn.

Bij dit onderdeel heb je bij enkele opgaven een computer nodig!



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met transformaties (verschuivingen en/of vermenigvuldigingen) van grafieken;
- in een functievoorschrift herkennen of de functie is ontstaan uit een standaardfunctie door optellen of vermenigvuldigen met een getal.

Voorkennis

- de grafiek van een functie goed in beeld krijgen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

a Maak de grafiek van $g_1(x) = (x-4)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f.

b Maak de grafiek van $g_2(x) = x^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_2 ontstaat uit die van f.

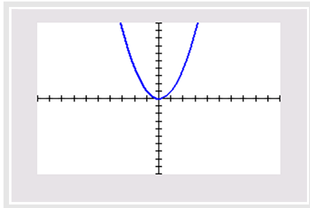
c Maak de grafiek van $g_3(x) = 1{,}5 \cdot x^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_3 ontstaat uit die van f.

d Maak de grafiek van $g_4(x) = (3 \cdot x)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_4 ontstaat uit die van f.

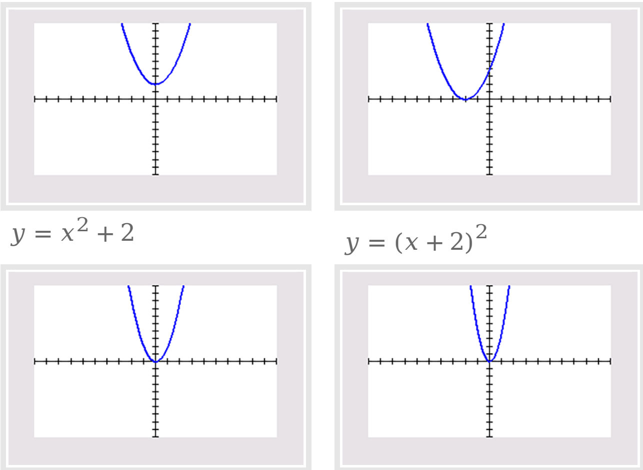
e Maak de grafiek van $g_5(x) = 1{,}5(x-4)^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_5 ontstaat uit die van f.

Uitleg

Bekijk de grafiek van de standaard kwadratische functie $f(x) = x^2$ op de grafische rekenmachine met de standaardinstellingen. Door in het functievoorschrift met een getal een vermenigvuldiging uit te voeren of een optelling te doen, verander je de grafiek van deze standaardfunctie. Je transformeert de grafiek. Transformeren is vervormen.



Figuur 2



$y = x^2 + 2$ | $y = (x+2)^2$

$y = 2 \cdot x^2$ | $y = (2 \cdot x)^2$

Figuur 3

Je moet vier transformaties kunnen herkennen.

- De grafiek van $y = x^2 + 2$ ontstaat door alle y-waarden met 2 te verhogen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden hoger van de x-as af te liggen. Dit heet 2 eenheden verschuiven ten opzichte van de x-as.
- De grafiek van $y = (x+2)^2$ ontstaat door alle x-waarden met 2 te verlagen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden verder naar links van de y-as af te liggen. Dit is hetzelfde als -2 eenheden verschuiven ten opzichte van de y-as.
- De grafiek van $y_2 = 2 \cdot x^2$ ontstaat door alle y-waarden 2 keer zo groot te maken. De punten van de grafiek komen daarom 2 keer zover van de x-as af te liggen. Dit heet met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as.
- De grafiek van $y = (2 \cdot x)^2$ ontstaat door alle x-waarden met 2 te vermenigvuldigen. De punten van de grafiek komen daarom $\frac{1}{2}$ keer zover van de y-as af te liggen. Dit is hetzelfde als met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as.

Opgave 1

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

a $y_2 = 0{,}5 \cdot x^2$

b $y_3 = (x-4)^2 + 2$

c $y_4 = 2 - x^2$

d $y_5 = (3x)^2 + 2$

Opgave 2

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^3$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn. Gebruik de grafische rekenmachine.

a $y_2 = 3 \cdot x^3$

b $y_3 = (x+4)^3 + 2$

c $y_4 = 5 - 2x^3$

d $y_5 = (0{,}5x)^3 + 1$

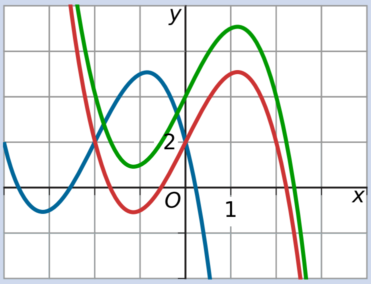
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Ga uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek $y = f(x) + 2$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as 2 eenheden te verschuiven;
- De blauwe grafiek $y = f(x+2)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as -2 eenheden te verschuiven.

Dit zijn twee **transformaties van een grafiek**. Door het optellen van een getal in het functievoorschrift verschuift de grafiek. In plaats van **verschuiving** spreek je ook wel van **translatie**. De karakteristieken van de getransformeerde functie kun je afleiden uit die van de gegeven functie.

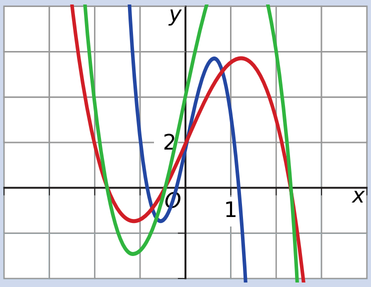


Figuur 4

Ga weer uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek $y = 2 \cdot f(x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as met factor 2 te vermenigvuldigen;
- De blauwe grafiek $y = f(2 \cdot x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.

Ook dit zijn twee transformaties van een grafiek. Door het vermenigvuldigen van een getal in het functievoorschrift wordt de grafiek vermenigvuldigd vanuit een as. Dit noem je **vermenigvuldiging ten opzichte van een as**. De eigenschappen van de getransformeerde functie kun je afleiden uit die van de **standaardfunctie**.

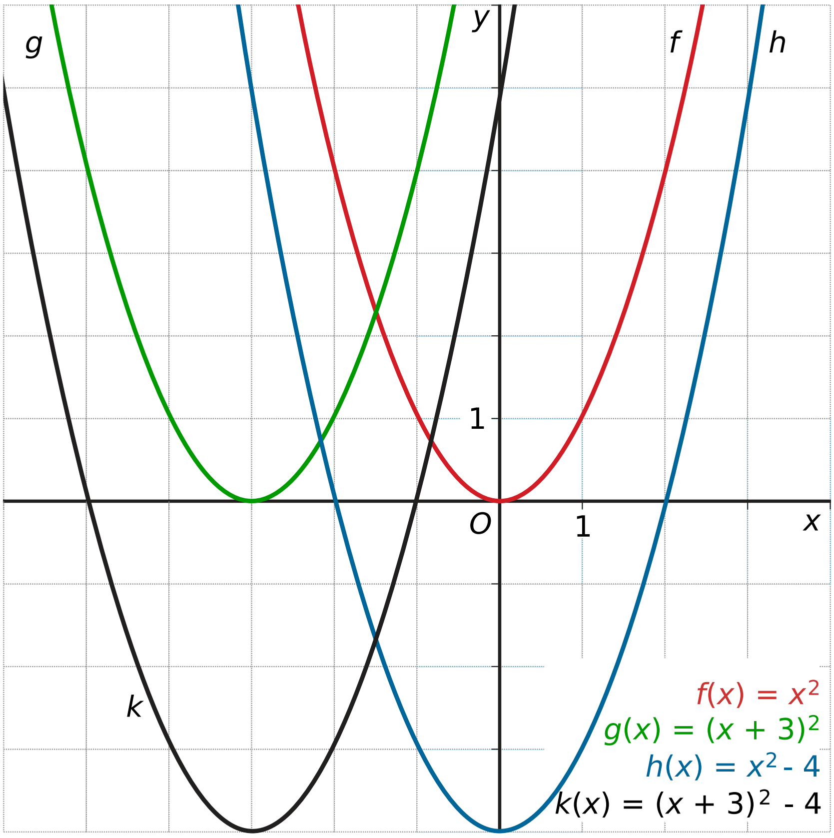


Figuur 5

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Grafieken verschuiven

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$, met als top (0,0).



Figuur 6

De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door translatie van -3 ten opzichte van de y-as. Het functievoorschrift van g wordt $g(x) = (x+3)^2$. De top verschuift 3 mee naar links en wordt (-3,0).

De grafiek van h ontstaat door op de grafiek van f een translatie van -4 ten opzichte van de x-as toe te passen. Het functievoorschrift wordt $h(x) = x^2 - 4$. De top verschuift weer mee en wordt (0,-4).

De grafiek van k ontstaat door op de grafiek van f eerst een translatie van -3 ten opzichte van de y-as en daarna een translatie van -4 ten opzichte van de x-as toe te passen. Het functievoorschrift wordt $k(x) = (x+3)^2 - 4$. De top verschuift weer mee en komt te liggen op (-3,-4).

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = f(x+3) = (x+3)^2 - 2(x+3)$. Je vervangt dus elke x in de formule door $x+3$. Denk daarbij om de haakjes.

Opgave 3

Werk met de applet in **Voorbeeld 1**. Gegeven is de grafiek van functie f met een onbekend voorschrift $f(x)$.

a Maak de grafiek van $g_1(x) = f(x+2)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

b Maak de grafiek van $g_2(x) = f(x) + 2$. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Neem aan dat $f(x) = x^3 - 4x$.

c Schrijf het voorschrift van g_1 op.

d Schrijf het voorschrift van g_2 op.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

a Plot de grafiek van f.

b Schrijf het functievoorschrift van $g_1(x) = f(x+2)$ op. Plot de grafiek van g_1. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

c Schrijf het functievoorschrift van $g_2(x) = f(x) - 2$ op. Plot de grafiek van g_2. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Voorbeeld 2

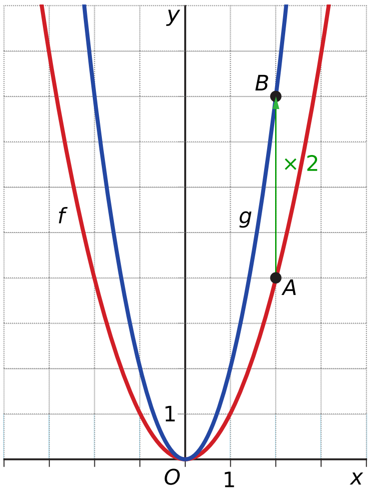
Bekijk de applet: Grafieken vermenigvuldigen

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$.

De grafiek van $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 2.

Je ziet in de grafiek bijvoorbeeld dat de y-coördinaat van punt B 8 is en dat is twee keer zo groot als de y-coördinaat van punt A.

Let op: Stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2\left(x^2 - 2x\right)$. Je vermenigvuldigt dus de hele formule met 2.



Figuur 7

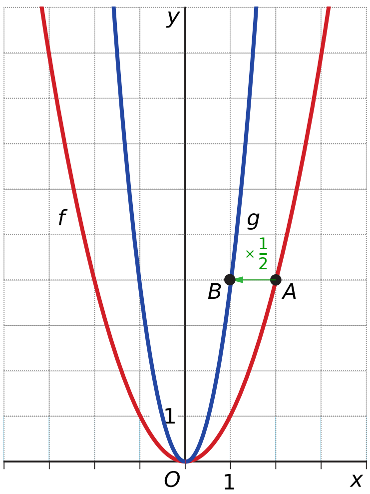
In het algemeen geldt dat de grafiek van $g(x) = c \cdot f(x)$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met c.

De grafiek van $g(x) = f(2x) = (2x)^2$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$.

Je ziet in de grafiek bijvoorbeeld dat de x-coördinaat van punt B 1 is en dat is een $\frac{1}{2}$ keer zo groot als de x-coördinaat van punt A.

Stel bijvoorbeeld dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = f(2x) = (2x)^2 - 2 \cdot (2x)$. Je vervangt dus elke x in de formule door $2x$.

In het algemeen geldt dat de grafiek van $g(x) = f(c \cdot x)$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met de factor $\frac{1}{c}$.



Figuur 8

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de grafieken van $g_1(x) = f(c_1 \cdot x)$ en $g_2(x) = c_2 \cdot f(x)$ kunnen ontstaan door die van $y = f(x)$ te vermenigvuldigen in horizontale of verticale richting.

Werk met de applet. Gegeven is de grafiek van functie f met een onbekend voorschrift $f(x)$.

a Maak de grafiek van $g_1(x) = f(2 \cdot x)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

b Maak de grafiek van $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Neem nu aan dat $f(x) = x^3 - 4x$.

c Schrijf het voorschrift van g_1 op.

d Geef het functievoorschrift van g_2.

e Oefen dit met andere functies g_1 en g_2.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

a Plot de grafiek van f.

b Schrijf het functievoorschrift van $g_1(x) = f(2x)$ op. Plot de grafiek van g_1. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

c Schrijf het functievoorschrift van $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$ op. Plot de grafiek van g_2. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Voorbeeld 3

De rode grafiek is die van functie f met voorschrift $f(x)$.

Bekijk de applet: Transformaties

De grafiek van $g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$ ontstaat uit die van f door de vier transformaties toe te passen. Bekijk nog eens goed (m.b.v. de schuifbalkjes) welke transformaties je in welke volgorde toepast.

Opgave 7

In de applet in **Voorbeeld 3** kun je alle vier de transformaties toepassen op functie f. Geef bij elk van de volgende functies aan welke transformaties je moet toepassen om de nieuwe grafiek uit die van f te laten ontstaan. (Let op de volgorde!)

a $g(x) = 2 \cdot f(x) + 3$

b $h(x) = f(x - 4) + 2$

c $k(x) = 2 - f(x)$

d $l(x) = f(3x) + 2$

e $m(x) = 2 \cdot f(3(x - 1)) + 4$

Opgave 8

Schrijf het functievoorschrift op van g als de grafiek uit die van f ontstaat door de genoemde transformaties.

a Ten opzichte van de x-as met -2 vermenigvuldigen en dan translatie van 1 ten opzichte van de x-as toepassen.

b Ten opzichte van de y-as met 2 vermenigvuldigen en dan een translatie van -3 ten opzichte van de x-as toepassen.

c Ten opzichte van de y-as een translatie van 4 en dan ten opzichte van de x-as een translatie van -2 uitvoeren.

d Ten opzichte van de y-as met 0,5 vermenigvuldigen, gevolgd door een translatie van 4 ten opzichte van de y-as.

e Ten opzichte van de y-as een translatie van 4, dan ten opzichte van de y-as een vermenigvuldiging met 0,5 en tenslotte een translatie ten opzichte van de x-as van -2 toepassen.

Voorbeeld 4

Als je een grafiek op de grafische rekenmachine wilt maken, dan moet je geschikte vensterinstellingen geven. Dan kan het nuttig zijn om te zien dat een bepaalde functie door transformatie kan ontstaan uit een veel eenvoudiger standaardfunctie. Zeker als je van die standaardfunctie alle karakteristieken weet.

Hoe breng je de grafiek van $f(x) = 200 - 5(x - 30)^2$ goed in beeld?

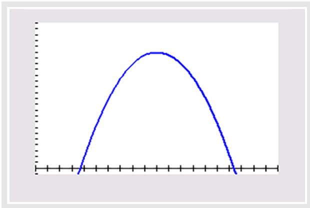
Antwoord

Je herkent dan de functie als $f(x) = -5(x - 30)^2 + 200$ met als bijbehorende standaardfunctie $y = x^2$. Die standaardfunctie heeft als grafiek een dalparabool met top $(0,0)$. De grafiek van f ontstaat uit die van $y = x^2$ door:

- een verschuiving van 30 ten opzichte van de y-as;
- een vermenigvuldiging van -5 ten opzichte van de x-as;
- een verschuiving van 200 ten opzichte van de x-as.

De top van de grafiek van f is daarom $(30,200)$ en de grafiek is een bergparabool.

De grafiek van $y = x^2$ is goed in beeld met venster $[-10,10] \times [-10,10]$. Op dit venster kun je ook de beschreven transformaties toepassen. De grafiek van f is daarom goed in beeld op $[20,40] \times [-10,250]$.



Figuur 9

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}25(x - 5)^4 - 10$. De grafiek van deze functie kan door transformaties ontstaan uit die van de bijbehorende standaardfunctie.

a Welke standaardfunctie is dat?

b Welke transformaties moeten er achtereenvolgens op de standaardfunctie worden toegepast?

c Bepaal het minimum van de grafiek van de gegeven functie. Voor welke waarde van x treedt dit minimum op?

Opgave 10

Werk met de grafische rekenmachine. Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$.

a Breng de grafiek van y_1 in beeld met de standaardinstellingen van het venster.

b Breng ook de grafieken van de volgende vier functies in beeld.

- $y_2 = x^2 + 2$
- $y_3 = (x + 2)^2$
- $y_4 = 2 \cdot x^2$
- $y_5 = (2 \cdot x)^2$

Onderzoek bij elk van die grafieken welke transformatie er moet worden toegepast op de grafiek van y_1 om de nieuwe grafiek te krijgen.

c De grafiek van $y_6 = 0{,}5(x - 3)^2 + 4$ ontstaat door transformatie van de grafiek van y_1. Welke transformaties moeten er achtereenvolgens worden toegepast?

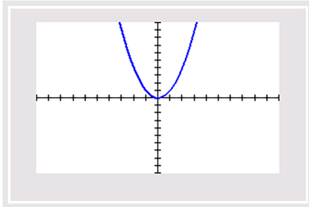
d Door welke transformaties ontstaat de grafiek $y_7 = -x^2$ uit die van y_1?

e Welke algemene vorm heeft het voorschrift van een functie die door transformaties ontstaat uit $y_1 = x^2$?

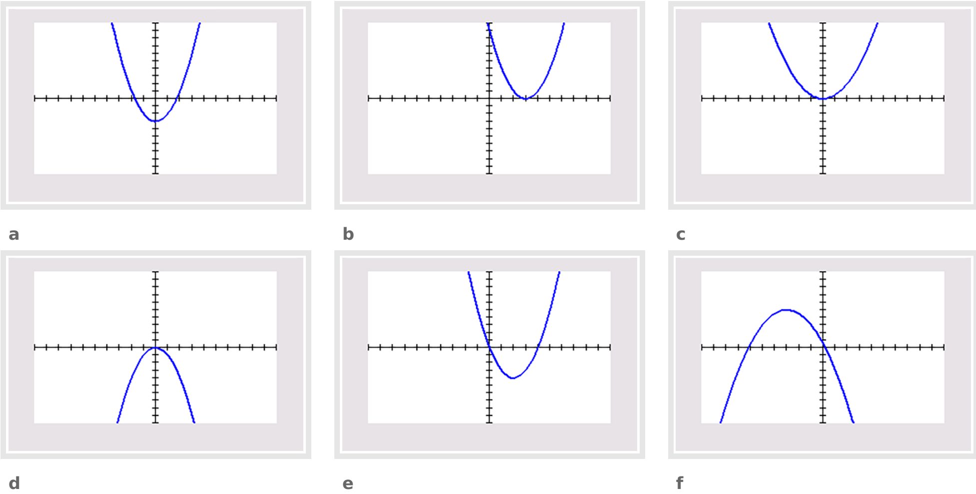
f Hoe kun je door gebruik te maken van transformaties de top van de parabool $y = -2(x - 12)^2 + 315$ bepalen?

Opgave 11

Je ziet hier de grafiek $y_1 = x^2$ in de standaardinstellingen van het venster van je rekenmachine. Bekijk de zes grafieken in de standaardinstellingen van het venster van de grafische rekenmachine. Ze zijn allemaal ontstaan uit transformatie van de grafiek y_1.



Figuur 10



Figuur 11

Geef bij elke grafiek aan welke transformatie er is toegepast en geef het functievoorschrift.

Verwerken

Opgave 12

Ga uit van de standaardfunctie $f(x) = 2x^2 - 3x$. De grafieken van de functies kun je door transformatie van deze standaardfunctie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn en geef de bijbehorende formules.

a $y_2 = 0{,}5 \cdot f(x)$

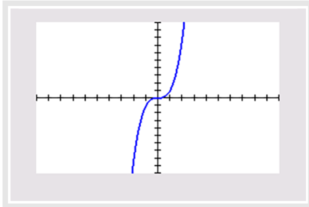
b $y_3 = f(x - 4) + 2$

c $y_4 = 2 - f(x)$

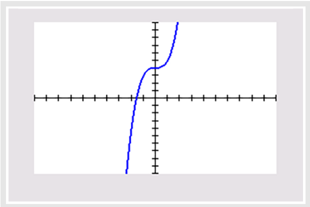
d $y_5 = f(3x) - 4$

Opgave 13

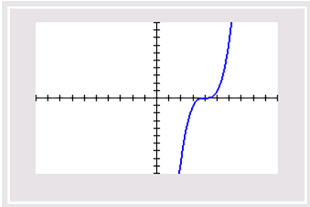
Je ziet vijf keer het venster van de grafische rekenmachine met de basisinstellingen. De standaardfunctie is $y_1 = x^3$. De overige grafieken zijn door transformatie van die grafiek ontstaan.



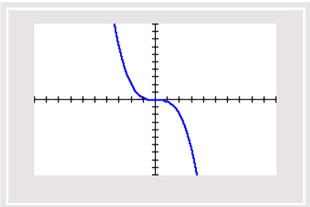
Figuur 12



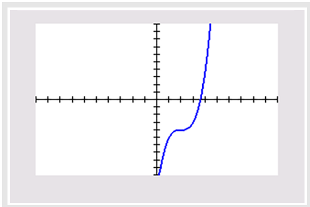
a



b



c



d

Figuur 13

Geef bij elke grafiek het juiste functievoorschrift.

Opgave 14

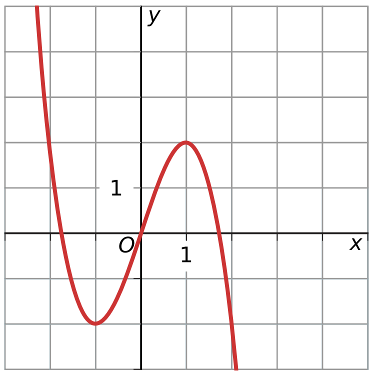
Hier en op het **werkblad** zie je de grafiek van $y_1 = f(x)$.
Teken de grafieken van de volgende functies. Schrijf erbij welke transformaties je toepast.

a $y_2 = f(x-2)$

b $y_3 = -2 \cdot f(x)$

c $y_4 = f(x) - 2$

d $y_5 = f(2x) - 1$



Figuur 14

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.

a De grafiek van y_1 ontstaat door op de grafiek van f een translatie van 2 ten opzichte van de x-as en een translatie van 5 ten opzichte van de y-as toe te passen. Geef het functievoorschrift en het domein en bereik van y_1.

b De grafiek van y_2 ontstaat door de grafiek van f eerst te spiegelen in de x-as, vervolgens een translatie van 3 ten opzichte van de y-as toe te passen en tot slot nog een translatie van -4 ten opzichte van de x-as door te voeren. Geef het functievoorschrift en het domein en bereik van y_2.

c De grafiek van y_3 ontstaat door de grafiek van f eerst te vermenigvuldigen met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as, vervolgens een translatie van 2 ten opzichte van de y-as toe te passen en tot slot nog een translatie van 4 ten opzichte van de x-as door te voeren. Geef het functievoorschrift en het domein en bereik van y_3.

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = -2 + (3x - 3)^2$.

a Toon aan dat de functie f te schrijven is als $f(x) = -2 + 9(x - 1)^2$.

b Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $y = x^2$? Zijn er meerdere mogelijkheden?

Opgave 17

De grafiek van $g(x) = ax^2 + bx + c$ gaat door het punt (2,10) en heeft als top de coördinaten (-2,4). Bereken a, b en c.

Toepassen

Opgave 18: Kogelslingeren

Een weggeslingerde kogel beschrijft in een Oxy-assenstelsel de baan $y = -0{,}02(x - 10)^2 + 4$. Het moment van loslaten ligt op $y = 2$. Dit is bij $x = 0$. y en x zijn beiden in meter uitgedrukt.

a Geef geschikte vensterinstellingen zodat je de volledige baan van de kogel op de grafische rekenmachine in beeld kunt krijgen.

b Bereken hoe ver deze kogelstoter met zijn kogel komt. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.

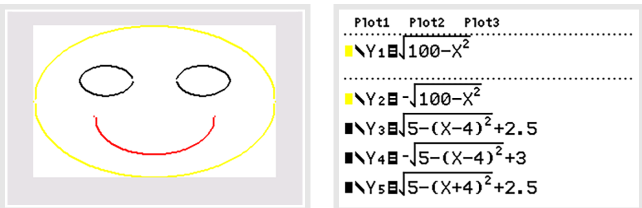
c Na hoeveel meter is de kogel weer even hoog als op het moment van loslaten?

Opgave 19: Smiley maken

Door gebruik te maken van de juiste functies (en vervormingen en verschuivingen) kun je smiley's maken op je grafische rekenmachine. Dat is best een aardige sport en nog leerzaam ook... De smiley hieronder bestaat uit een aantal (soms vervormde en verschoven) halve cirkels. Omdat voor elk punt (x,y) op een cirkel om de oorsprong $O(0,0)$ met straal 10 geldt: $x^2 + y^2 = 100$, noem je dit wel de vergelijking van deze cirkel. Om de grafische rekenmachine te kunnen gebruiken zet je de vergelijking om in een functievoorschrift, eigenlijk in twee functievoorschriften. Ga na, dat: $y = \pm\sqrt{100 - x^2}$.

Deze formules zijn gebruikt om de buitenste cirkel (twee halve cirkels) van de smiley te maken, zoals je ziet. De andere halve cirkels krijg je door transformaties toe te passen. In de figuur is het assenstelsel uitgezet.

Maak zelf een smiley en laat een medeleerling bedenken welke formules je hebt gebruikt (voordat je het assenstelsel uitzet). Doe daarna het omgekeerde.



Figuur 15

Testen

Opgave 20

Gegeven is een functie $y_1 = f(x)$. Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek te krijgen van de volgende functies?

a $y_2 = f(x - 3) + 5$

b $y_3 = 0{,}5 \cdot f(x) + 1$

c $y_4 = f(3x)$

Opgave 21

Om de grafiek van $f(x) = 10\sqrt{x} + 50$ goed in beeld te krijgen op de grafische rekenmachine, moet je weten hoe deze ontstaat uit transformatie van de bijbehorende standaardfunctie.

a Welke standaardfunctie is dat?

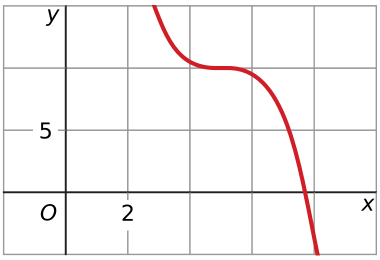
b Welke transformaties moet je op de grafiek van de standaardfunctie toepassen?

c Schrijf op bij welke vensterinstelling de grafiek van f goed in beeld komt.

Opgave 22

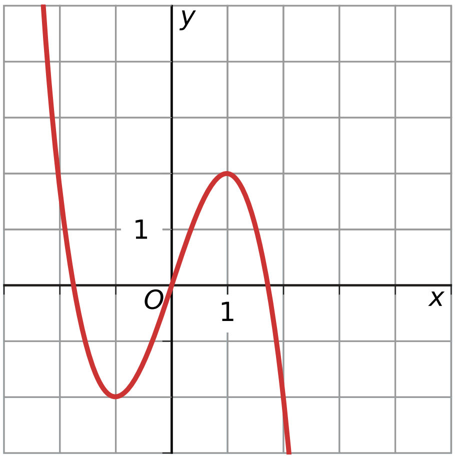
Je ziet de grafiek van een functie g die door transformatie is ontstaan uit de grafiek van $f(x) = x^3$. De grafiek van g gaat door het punt (7,6).

Schrijf het bijpassende functievoorschrift op.



Figuur 16

Werkblad bij **Opgave 14 op pagina 9**



Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.