2.4 Samengestelde functies

Inleiding

Soms zitten functievoorschriften zo in elkaar dat je op een bepaalde invoerwaarde alleen een ketting van na elkaar uitgevoerde bewerkingen toepast. Je hoeft dan de invoerwaarde slechts één keer te geven, daarna voer je elke schakel (rekenstap) van deze ketting bewerkingen na elkaar uit. Het is handig als je kunt herkennen wanneer dit het geval is, want dan kun je gemakkelijk stapsgewijs terugrekenen. Daarbij gebruik je dan de terugrekenbewerkingen, de inverse bewerkingen.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- herkennen uit welke schakels (rekenstappen) het functievoorschrift van een samengestelde functie bestaat;
- het bij een functie behorende rekenschema en terugrekenschema opstellen;
- het begrip inverse functie.

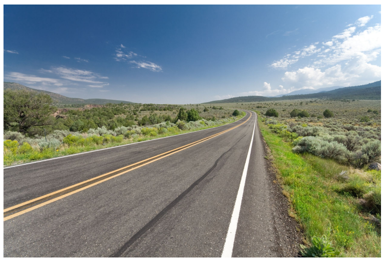
Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken en tabellen van functies maken (ook met de grafische rekenmachine);
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

Een vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto die met een gegeven snelheid rijdt, luidt: “Neem de snelheid in kilometer per uur (km/h) en deel dit door 10. Kwadrateer de uitkomst en vermenigvuldig daarna wat je hebt gevonden met 3/4. Je krijgt dan de lengte van de remweg in meter.”



Figuur 2

a Bereken de lengte van de remweg bij een snelheid van 60 kilometer per uur. Volg de rekenstappen van de vuistregel.

b Stel een formule op voor de remweg R (in meter) als functie van de snelheid v in kilometer per uur (km/h).

Bij een ongeval waarbij een auto voluit moest remmen en zonder botsen tot stilstand is gekomen, meet de politie een remspoor van 90 meter. Daaruit wil men kunnen berekenen hoe hoog de snelheid was waarmee de auto heeft gereden.

c Hoe doe je dit met de gegeven vuistregel? Bereken die snelheid in kilometer per uur (km/h).

d Stel een formule op voor de snelheid v (in km/h) als functie van de remweg R in meter.

Uitleg

Een vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto die met een gegeven snelheid rijdt, luidt: “Neem de snelheid in km/h en deel dit getal door 10. Kwadrateer de uitkomst en vermenigvuldig daarna wat je hebt gevonden met 3/4. Je krijgt dan de lengte van de remweg in meter.”

Om die remweg te berekenen werk je bij deze vuistregel met meerdere rekenstappen. Neem voor de remweg R (in m) en voor de snelheid v (in km/h). Bekijk het rekenschema.

$$v \xrightarrow{\ /10\ } \frac{v}{10} \xrightarrow{\ (\ldots)^2\ } \left(\frac{v}{10}\right)^2 \xrightarrow{\ \times\frac{3}{4}\ } R = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{v}{10}\right)^2$$

Figuur 3

De functie met voorschrift $R = f(v)$ is een samengestelde functie die bestaat uit drie rekenstappen, drie schakels.

Wil je omgekeerd de snelheid berekenen als je de remweg weet, dan kun je beter een functie maken van de vorm $v = g(R)$. Door elke afzonderlijke schakel terug te rekenen, maak je een terugrekenschema.

$$v = 10\cdot\sqrt{\frac{4}{3}R} \xleftarrow{\ \times 10\ } \sqrt{\frac{4}{3}R} \xleftarrow{\ \sqrt{\ldots}\ } \frac{4}{3}R \xleftarrow{\ /\frac{3}{4}\ } R$$

Figuur 4

Zo'n terugrekenfunctie noem je wel de inverse functie: $g = f^{\text{inv}}$. Bij beide functies horen dezelfde combinaties van twee waarden, maar in omgekeerde volgorde. Bij $R = f(v)$ horen punten van de vorm (v,R), en bij $v = f^{\text{inv}}(R)$ horen punten van de vorm (R,v). Omdat de invoerwaarden op de horizontale as moeten komen, wissel je bij de inverse functie de assen om.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt gesproken over een samengestelde functie $R = f(v) = \frac{3}{4}\left(\frac{v}{10}\right)^2$.

Het gaat om het berekenen van de remweg van een auto die met een bepaalde snelheid rijdt.

a Maak de grafiek van $R = f(v)$.

b Neem aan dat v alleen de waarden van 0 tot kleiner of gelijk aan 140 aanneemt.
Bepaal het domein en het bereik van deze functie.

Als je vanuit een gemeten remweg de snelheid wilt berekenen, dan is de inverse functie handiger. Die vind je met behulp van een terugrekenschema.

c Hoe maak je zo'n terugrekenschema?

d Maak de grafiek van de inverse functie $v = f^{\text{inv}}(R)$.

e Bepaal het domein en het bereik van de inverse functie. Neem weer aan dat $0 \leq v \leq 140$.

Opgave 2

Gegeven zijn twee functies f en g met $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x + 5$.
h is de functie die ontstaat door eerst functie f toe te passen (als eerste schakel) en dan functie g: $h(x) = g(f(x))$.

a Geef dit weer in een rekenschema. Bereken $h(4)$.

b Geef het functievoorschrift van h.

c Maak een terugrekenschema bij h en schrijf het functievoorschrift van h^{inv} op.

k is de functie die ontstaat door eerst functie g toe te passen (als eerste schakel) en dan functie f: $k(x) = f(g(x))$.

d Geef dit weer in een rekenschema en bereken $k(4)$.

e Schrijf het functievoorschrift van k op.

f Maak een terugrekenschema bij k en geef het functievoorschrift van k^{inv}.

Opgave 3

Bij het bepalen van een inverse functie moet je er goed op letten dat het terugrekenen telkens precies één waarde oplevert. Neem bijvoorbeeld de functie $f(x) = x^2$.

a Welke twee waarden vind je bij terugrekenen vanuit de functiewaarde 9?

De terugrekenfunctie van $f(x) = x^2$ is $f^{\text{inv}}(x) = \sqrt{x}$.

b Bereken nu $f^{\text{inv}}(9)$. Welk probleem ontstaat er als je dit vergelijkt met het antwoord bij a?

c Bekijk ook de grafieken van f en f^{inv} op de grafische rekenmachine. Welk gedeelte van de grafiek van f is het spiegelbeeld van die van f^{inv}?

d Waaraan moet een functie voldoen om er een inverse functie bij te kunnen maken?

e Leg uit waarom $f^{\text{inv}}(f(x)) = x$.

f Is ook $f\left(f^{\text{inv}}(x)\right) = x$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je functies na elkaar uitvoert, krijg je een **samengestelde functie**. Zo kun je bijvoorbeeld twee functies g en h schakelen tot een samengestelde functie $f(x) = h(g(x))$.

$$x \longrightarrow \boxed{g(x)} \longrightarrow u \longrightarrow \boxed{h(u)} \longrightarrow y$$

Figuur 5

Bij veel samengestelde functies kun je dit **rekenschema** gebruiken om terug te rekenen door alle afzonderlijke schakels terug te rekenen. Je gebruikt dan de inverse functies van g en h om de **inverse functie** van f te krijgen.

$$x \longleftarrow \boxed{g^{\text{inv}}(u)} \longleftarrow u \longleftarrow \boxed{h^{\text{inv}}(x)} \longleftarrow y$$

Figuur 6

Zo heb je door terugrekenen $y = f(x)$ herleid tot $x = f^{\text{inv}}(y)$. Bij de inverse functie zijn de y-waarden de invoervariabelen. Omdat het in de wiskunde gebruikelijk is om de letter x te gebruiken voor de invoervariabele, schrijf je dit laatste meestal als $y = f^{\text{inv}}(x)$. De grafieken van f en f^{inv} zijn daardoor elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

Bij het bepalen van de inverse functie moet je er wel voor zorgen dat het terugrekenen eenduidig is. Bij elke y-waarde van f moet bij terugrekenen ook precies één waarde voor x horen.
Is dit niet het geval, dan verklein je het domein van f tot dit wel het geval is.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies $a(x) = x^2$, $b(x) = x + 9$ en $c(x) = \sqrt{x}$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$.
Schrijf het functievoorschrift op van de samengestelde functie $f(x) = c(b(a(x)))$ en zijn inverse.

Antwoord

De samengestelde functie f ontstaat zo:

$$x \longrightarrow \boxed{(...)^2} \longrightarrow x^2 \longrightarrow \boxed{+9} \longrightarrow x^2+9 \longrightarrow \boxed{\sqrt{...}} \longrightarrow y = \sqrt{x^2+9}$$

Figuur 7

Het voorschrift ervan is dus $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

De inverse functie vind je zo:

$$x = \sqrt{y^2-9} \longleftarrow \boxed{\sqrt{...}} \longleftarrow y^2-9 \longleftarrow \boxed{-9} \longleftarrow y^2 \longleftarrow \boxed{(...)^2} \longleftarrow y$$

Figuur 8

Het voorschrift van de inverse functie is $f^{\text{inv}}(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

Bij de laatste terugrekenstap moet je terugrekenen vanuit een kwadraat. En dat levert meestal twee uitkomsten op. Omdat het domein van a beperkt is tot $[0, \rightarrow\rangle$, neem je alleen de positieve uitkomst.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** worden drie functies geschakeld tot een samengestelde functie f. De volgorde waarin je de schakels zet, is daarbij van belang. Bekijk in het voorbeeld hoe je de functievoorschriften van f en zijn inverse opstelt.

a Stel het functievoorschrift op van $g(x) = a(b(c(x)))$.

b Stel een functievoorschrift op voor de inverse van g. Laat met een terugrekenschema zien hoe je dit doet.

c Maak vervolgens beide grafieken met de grafische rekenmachine en ga na dat ze elkaars spiegelbeeld lijken te zijn bij spiegeling in de lijn $y = 81$.

Opgave 5

Om een inverse functie te kunnen opstellen, moet je kunnen terugrekenen. En daarvoor moet je de terugrekenstappen (inverse functies) van allerlei basisbewerkingen kennen.

a Bij $f(x) = \frac{1}{2}x$ wordt één basisbewerking uitgevoerd, namelijk vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$. Wat is dan de terugrekenbewerking?

b Welk voorschrift heeft f^{inv}?

c Welke bewerking hoort bij $f(x) = \frac{1}{x}$?

d Welke inverse functie past daar bij?

e De inverse bewerking van kwadrateren is worteltrekken (en omgekeerd). Waar moet je in dit geval voor oppassen?

Opgave 6

Gegeven zijn de functies f en g door $f(x) = 3x - 1$ en $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

a Bereken $f(g(6))$ en $g(f(6))$.

b Laat zien dat voor elke x geldt $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

c Maak beide grafieken in één assenstelsel. Zijn de functies f en g elkaars inverse?

Voorbeeld 2

Voor een toets kun je maximaal 30 punten krijgen. Het cijfer c wordt berekend met de formule $c = \frac{p}{30} \cdot 9 + 1$. Hierin is p het behaalde aantal punten. Je ziet dat c een lineaire functie is van p.
Uit welke basisbewerkingen bestaat $c(p)$? Stel een formule op voor p als functie van c.

Antwoord

De basisbewerkingen zijn achtereenvolgens:

- delen door 30;
- vermenigvuldigen met 9;
- 1 optellen.

Om p als functie van c te kunnen schrijven, ga je terugrekenen (denk om de omgekeerde volgorde):

- 1 aftrekken;
- delen door 9;
- vermenigvuldigen met 30.

Je krijgt $p = \frac{c-1}{9} \cdot 30$.

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 2**. Een andere docent hanteert voor dezelfde toets de formule $c = 1 + \frac{3p}{10}$.

a Geef bij deze formule de rekenstappen.

b Stel een bijpassende formule op voor p als functie van c.

c Laat zien dat deze formule voor c hetzelfde resultaat oplevert als die in het voorbeeld.

Als je van de functie $c(p)$ een grafiek maakt met de grafische rekenmachine, vervang je p door X en c door Y.

d Hoe zit dat als je in dezelfde figuur de grafiek van $p(c)$ maakt?

Opgave 8

Een winkelier rekent over al zijn producten 21% btw die hij zelf weer afdraagt aan de overheid. Dat betekent dat van elk artikel de winkelprijs w wordt berekend door de kostprijs k met 1,21 te vermenigvuldigen.

a Stel een formule op voor w als functie van k.

b Een klant ziet alleen de winkelprijs. De kostprijs kan hij dan berekenen met een formule van de vorm $k = c \cdot w$. Bereken de waarde van de constante c in drie decimalen nauwkeurig.

c Hoeveel procent van de winkelprijs is de kostprijs van elk artikel?

Verwerken

Opgave 9

Gegeven zijn de functies f, g en h met $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ en $h(x) = \frac{1}{2}x$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$

a Bereken $f(g(4))$, $g(h(4))$ en $h(f(4))$.

b Geef de functievoorschriften van $f(g(x))$, $g(h(x))$ en $h(f(x))$.

c Geef het functievoorschrift van $k(x) = f(h(g(x)))$.

d Bepaal het functievoorschrift van k^{inv}.

e Controleer je antwoorden bij c en d door na te gaan dat $k^{\text{inv}}(k(x)) = x$ voor alle $x \geq 0$.

Opgave 10

Maak bij elk van de volgende functies een rekenschema (als dat mogelijk is) en een terugrekenschema. Schrijf het functievoorschrift en het domein van de inverse functie op.

a $f_1(x) = \sqrt{x-4}$

b $f_2(x) = \sqrt{x} - 4$

c $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ met $x \geq 0$

d $f_4(x) = \frac{1}{2}(x+5)^2$ met $x \geq -5$

e $f_5(x) = x + \sqrt{x}$

Opgave 11

Welke van de functies zijn elkaars inverse functie?

- $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ met domein $\mathbb{R}$
- $g(x) = x^2$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$
- $h(x) = 2x + \frac{1}{2}$ met domein $\mathbb{R}$
- $k(x) = 2x - 4$ met domein $\mathbb{R}$
- $l(x) = \sqrt{x}$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x + 8$ en $g(x) = 0{,}5x + b$.
Voor welke b geldt $f(g(x)) = g(f(x))$?

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = 3x + b$. De grafiek van f snijdt de grafiek van f^{inv} bij $x = 7$.
Bereken b.

Opgave 14

Bepaal bij de genoemde functies zo mogelijk de inverse functie. Als de inverse functie niet bestaat, beredeneer dan waarom niet.

a $f(x) = \frac{3-x}{x}$

b $g(x) = |x|$

c $h(x) = |x - 4| + 2$ met $\text{D}_h = \langle \leftarrow ,4\rangle$

Toepassen

Opgave 15: Omhoog werpen

Een voorwerp wordt met een beginsnelheid van 20 meter per seconde (m/s) omhoog geworpen. Met verwaarlozing van de luchtweerstand is de snelheid v (in m/s) een functie van de tijd t (in seconde): $v(t) = 20 - 9{,}81t$

a Bereken op twee decimalen nauwkeurig op welk tijdstip het voorwerp voor het eerst zal vallen.

b Schrijf t als functie van v.

c Bereken met de formule uit b op twee decimalen nauwkeurig op welk tijdstip het voorwerp voor het eerst zal vallen.

Opgave 16: Slingertijd

Als je een massa aan een dunne kabel ophangt en je brengt die massa in beweging, gaat die massa heen en weer slingeren met een slingertijd van

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}81}}$$

Hierin is t de slingertijd in seconden en l de lengte van het touw in meter (9,81 is de zwaartekrachts-constante).

a Welke slingertijd hoort er bij een massa die slingert aan een kabel met een lengte van 2 meter? Geef je antwoord in honderdsten van seconden nauwkeurig.

Iemand wil de lengte van de kabel berekenen door de slingertijd te meten. (De lengte van de kabel is de afstand van het ophangpunt tot het massamiddelpunt van het slingerende voorwerp.) Hij schrijft de formule in de vorm $l = \ldots$

b Schrijf l als functie van t.

c Bereken nu met de formule uit b in twee decimalen nauwkeurig de lengte van de kabel als de slingertijd 3,2 seconden is.

Testen

Opgave 17

Gegeven zijn de functies f, g en h met $f(x) = x + 4$, $g(x) = x^2$ en $h(x) = 2x$.

a Bereken $f(g(4))$, $g(f(4))$ en $h(f(4))$.

b Geef de functievoorschriften van $f(g(x))$, $g(f(x))$ en $h(f(x))$.

c Geef het functievoorschrift van $k(x) = f(g(h(x)))$.

d Waarom heeft de functie k alleen een inverse functie als je het domein beperkt tot $[0, \rightarrow\rangle$?

e Bepaal het functievoorschrift van k^{inv}.

Opgave 18

Wanneer een voorwerp vanaf een hoogte van 100 meter op aarde valt uit het luchtledige, geldt voor de hoogte boven de grond van het voorwerp $h(t) = 100 - 4{,}9t^2$ met h de hoogte in meter en t de tijd in seconden.

a Schrijf t als functie van h.

b Bereken in één decimaal nauwkeurig hoeveel seconden het voorwerp over de val vanaf een hoogte van 100 meter doet.

c Op een andere planeet geldt voor de hoogte van een voorwerp die op 100 meter los gelaten wordt $g(t) = h(2t)$. Bepaal het functievoorschrift van g.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.