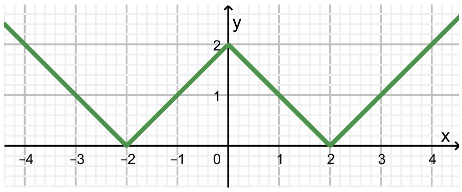
2.3 Bijzondere functies

Inleiding

Je kent al diverse functies. Alleen sprak je tot nu toe vaak over verbanden en formules. Denk nog even terug aan de lineaire verbanden, de kwadratische verbanden en de hyperbolische verbanden. Het gaat daarbij eigenlijk steeds over functies. In dit onderdeel komen enkele bijzondere functies voorbij.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met lineaire functies;
- werken met absolute waarde en modulusfuncties;
- werken met gehele delen en de Entier-functie.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- het domein en het bereik van een functie vinden;
- de intervalnotatie gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je staat op een viaduct over de snelweg A1. Je ziet een auto rijden met een snelheid van 90 kilometer per uur (km/h). Precies 6 minuten later zie je een tweede auto onder het viaduct uitkomen. Deze tweede auto rijdt 120 km/h en in dezelfde richting als de eerste auto.

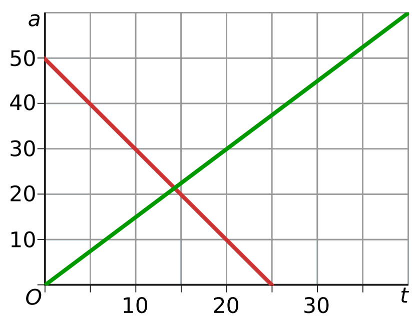
a Teken bij elk van deze auto's de grafiek van de afstand tot het viaduct. Zet beide grafieken in één assenstelsel en kies geschikte eenheden.

b Na hoeveel minuten heeft de tweede auto de eerste ingehaald?

c Je kunt ook kijken naar de onderlinge afstand van beide auto's. Teken de grafiek van die onderlinge afstand. Waarom heeft deze grafiek een knik?

Uitleg

Twee auto's rijden met een constante snelheid over dezelfde weg. Auto I gaat van A naar B met een constante snelheid van 90 kilometer per uur (km/h) en auto II van B naar A met een constante snelheid van 120 km/h. A en B liggen 50 kilometer van elkaar verwijderd. Beide auto's zijn op hetzelfde moment gestart. Als je wilt berekenen op welk tijdstip ze elkaar tegenkomen, stel je (bijvoorbeeld) de afstand tot A voor door de variabele a. Neem voor de tijd in minuten de variabele t.



Figuur 2

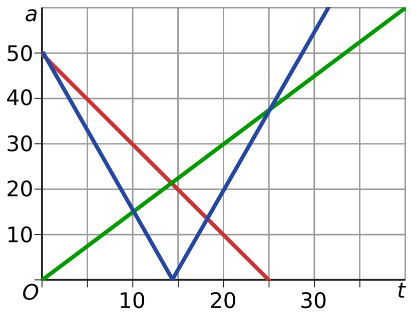
Omdat auto I met 1,5 km per minuut rijdt, geldt: $a_{\text{I}} = 1{,}5t$.
Voor auto II geldt $a_{\text{II}}(0) = 50$ en dus: $a_{\text{II}}(t) = 50 - 2t$.

Bij beide formules is er een lineair verband tussen a en t: a_{I} en a_{II} zijn lineaire functies. Je ziet beide grafieken, het zijn rechte lijnen.

De auto's komen elkaar tegen als $1{,}5t = 50 - 2t$.
Als je deze vergelijking oplost, vind je $t \approx 14{,}3$ minuten.

Je kunt de onderlinge afstand van beide auto's weergeven door de verschilgrafiek van a_{I} en a_{II}. Je ziet de verschilgrafiek in de figuur getekend. De verschilgrafiek vertoont een knik op het moment dat $a_{\text{I}} = a_{\text{II}}$, dus bij $t \approx 14{,}3$. Dat komt omdat een afstand altijd positief is.

- als $t \leq 14{,}3$ dan is het positieve verschil $a_{\text{II}} - a_{\text{I}}$
- als $t > 14{,}3$ dan is het positieve verschil $a_{\text{I}} - a_{\text{II}}$



Figuur 3

Bij de verschilgrafiek hoort een functie die eigenlijk twee voorschriften kent, een voor $t \leq 14{,}3$ en een voor $t > 14{,}3$. Als een uitdrukking met variabelen positief moet zijn (omdat het een afstand voorstelt bijvoorbeeld) zet je die uitdrukking tussen zogenaamde absoluutstrepen. Hier bijvoorbeeld is die afstand $|a_{\text{I}} - a_{\text{II}}|$. Dit is de absolute waarde van het verschil van a_{I} en a_{II}, de waarde zonder het (min)teken.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Twee auto's rijden met een constante snelheid over dezelfde weg. Auto I gaat van A naar B met een constante snelheid van 90 km/h en auto II van B naar A met een constante snelheid van 120 km/h.

a In de uitleg wordt de afstand van beide auto's tot A bekeken. Bekijk die afstand nu vanuit B. Schrijf de twee bijpassende formules op.

b Onderzoek door berekening of beide auto's elkaar nu op hetzelfde tijdstip tegenkomen.

c In de uitleg vind je een passende verschilgrafiek met afstanden ten opzichte van A. Maak nu zelf een grafiek van hun onderlinge afstand met de afstanden ten opzichte van B.

d Voor welke twee waarden van t bedraagt die onderlinge afstand 20 km?

Opgave 2

Twee fietsers fietsen recht op elkaar af en komen elkaar op $t = 0$ tegen. Beiden fietsen met een snelheid van 18 km/h. Hun onderlinge afstand a in meter hangt af van de tijd t in seconden.

a Welk voorschrift heeft a als functie van t?

b Bereken de tijdstippen waarop de onderlinge afstand 90 meter is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

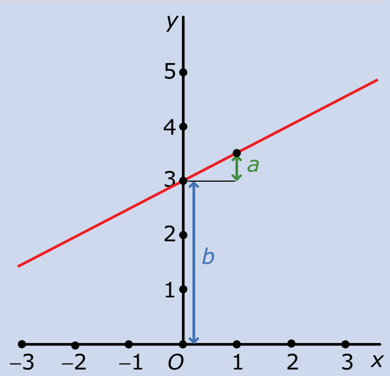
Bekijk de applet: lineaire functies

Er bestaan veel verschillende soorten functies.
Een **lineaire functie** heeft een functievoorschrift van de vorm $y = ax + b$, met:

- a het **hellingsgetal**;
- b het **begingetal**, de functiewaarde bij $x = 0$.

De grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn door $(0,b)$ en $(1,b + a)$. Voor 'hellingsgetal' wordt wel het woord **richtingscoëfficiënt** gebruikt, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.

Je noemt $f(x) = ax + b$ een familie van functies (in dit geval de familie van de lineaire functies). Het gaat daarbij om een verband tussen de variabelen x en $y = f(x)$. a en b noem je **parameters**. Zo heb je ook de familie van de kwadratische functies.

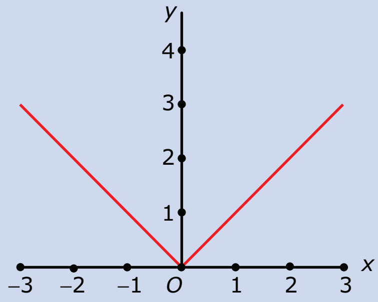


Figuur 4

De **absolute waarde** $|x|$ van een getal x is de waarde ervan zonder (min)teken. Zo is: $|3| = 3$ en $|-3| = 3$. Dit komt omdat beide getallen dezelfde (positieve) afstand tot 0 hebben: ze zijn elkaars tegengestelde. Voor de wiskundige notatie van de absolute waarde van x gebruik je **absoluutstrepen**, de meeste rekenmachines gebruiken: abs(x). De meest eenvoudige absoluutfunctie is:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{als} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{als} \quad x < 0 \end{cases}.$$

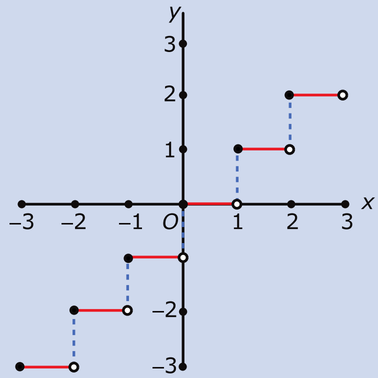
De grafiek heeft een knik bij 0.



Figuur 5

Het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan x heet de entier (Frans voor 'geheel') van x. De entier van 2,913 is hetzelfde als die van 2,5 en die van 2,0, namelijk 2.

Hierbij past de **entierfunctie** of **integerfunctie**. Deze functie rondt elke x-waarde naar beneden af op een gehele waarde. Je schrijft: $y = \text{int}(x)$. De grafiek vertoont sprongen, het is een trapgrafiek. Je ziet de grafiek getekend, let goed op de open en de gesloten rondjes. Het domein van de entierfunctie is $\mathbb{R}$. Het bereik is $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

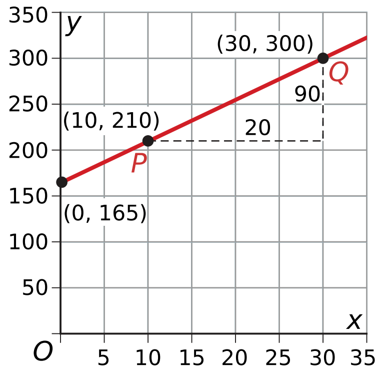


Figuur 6

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet de punten $P(10,210)$ en $Q(30,300)$. Stel een functievoorschrift op voor de functie waarvan de grafiek de rechte lijn door P en Q is.



Figuur 7

Antwoord

Er is sprake van een lineaire functie $f(x) = ax + b$.
Je zoekt daarom het hellingsgetal a en het begingetal b (de functiewaarde bij 0). Vergelijk de twee gegeven punten van de grafiek.

Bij een toename van x met $30-10 = 20$ hoort een toename van y met $300-210 = 90$. Dus bij een toename van x met 1 hoort een toename van y met $a = \frac{90}{20} = 4{,}5$. Daarom is het hellingsgetal $a = 4{,}5$.

De functiewaarde bij 0 is niet bekend.
De functie heeft als voorschrift $f(x) = 4{,}5x + b$.
Omdat $f(10) = 210$ geldt $210 = 4{,}5 \cdot 10 + b$. En dit geeft $b = 165$.

Dus het functievoorschrift is $f(x) = 4{,}5x + 165$.

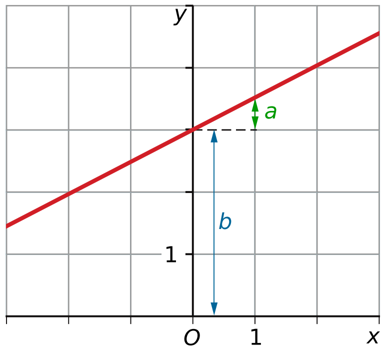
Opgave 3

Elke lineaire functie f heeft een functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax + b$.

a Welke betekenis heeft a voor de grafiek van f? Welke waarde heeft a in de figuur?

b Welke betekenis heeft b voor de grafiek van f? Welke waarde heeft b in de figuur?

c Welke waarden voor a en b moet je nemen om als grafiek een rechte lijn te krijgen die door de punten $A(1,2)$ en $B(5,3)$ gaat?



Figuur 8

Opgave 4

Voor een rit in een taxi betaal je voorrijkosten en een bedrag per gereden kilometer.

- voorrijkosten € 3,20
- per gereden kilometer € 1,20

De ritprijs (R) hangt af van het aantal gereden kilometer (a).

a Laat zien dat $R(10) = 15{,}2$.

b Stel een voorschrift op voor de functie $R(a)$.

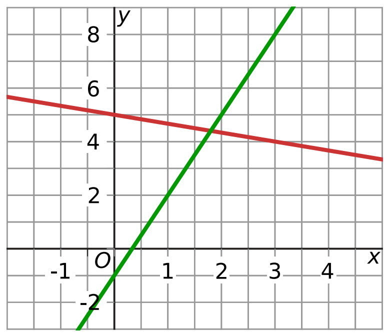
c Dit is een voorbeeld van een lineaire functie. Teken de grafiek van deze functie op de grafische rekenmachine.

d Waar vind je de twee getallen 3,20 en 1,20 in je grafiek terug?

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je het voorschrift opstelt van een lineaire functie als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Je ziet hier twee grafieken van lineaire functies.

Stel voor elk van deze functies een passend voorschrift op en bereken algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.



Figuur 9

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bekijk de grafieken van $y_1 = x^2$ en $y_2 = 6 - x$.

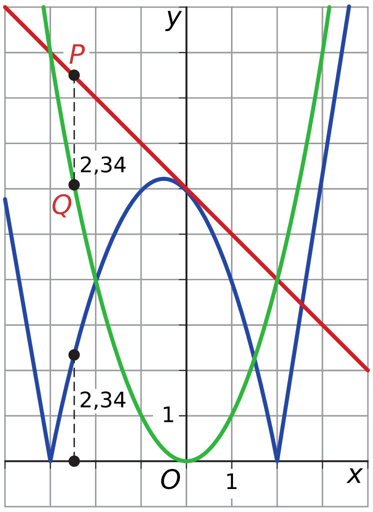
De ‘afstand’ tussen beide grafieken kun je definiëren als $a(x) = |y_2 - y_1|$. De afstand is de lengte van lijnstuk PQ.

Door punt P te bewegen over zijn grafiek, verandert a. De functiewaarden $a(x)$ doorlopen de blauwe grafiek. Je kunt deze grafiek maken met de grafische rekenmachine door het functievoorschrift in gesplitste vorm in te voeren:

$$a(x) = \begin{cases} 6 - x - x^2 & \text{als} \quad -3 \leq x \leq 2 \\ x^2 - (6 - x) & \text{als} \quad x < -3 \vee x > 2 \end{cases}$$

Je kunt ook de abs-functie gebruiken.

De grafiek heeft twee knikpunten die je vindt bij de x-waarden waarin $6 - x = x^2$. Die kun je dus algebraïsch berekenen.



Figuur 10

Opgave 6

Bekijk in de **Theorie** wat een absolute waarde is. De absoluutfunctie $f(x) = |x|$ is ook op de grafische rekenmachine te vinden.

a Breng de grafiek van $f(x) = |x|$ met de grafische rekenmachine in beeld.

b Welk knikpunt heeft de grafiek van f?

c Los op: $|x| = 6$.

d Waarom is de vergelijking $|x| = -2$ niet op te lossen?

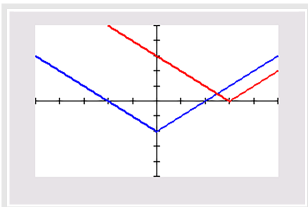
Opgave 7

Bekijk de grafieken van de functies $y_1 = |x| - 2$ en $y_2 = |x - 3|$.

a Schrijf bij elk van deze functies het voorschrift in gesplitste vorm, dus zonder absoluutstrepen.

b Bereken algebraïsch het snijpunt van beide grafieken.

c Los bij beide functies de vergelijking $y = 4$ op.



Figuur 11

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**. Het gaat daarin om de ‘afstand’ $a(x) = |y_1 - y_2|$ tussen de grafieken van $y_1 = x^2$ en $y_2 = 6 - x$.

a Teken de grafiek van $a(x)$ op de grafische rekenmachine.

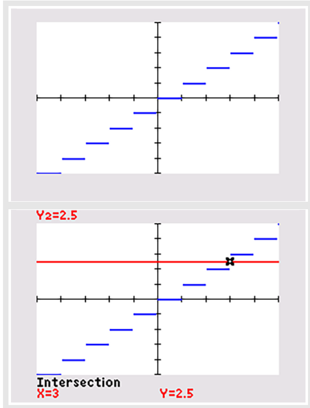
b Waarom staat afstand tussen aanhalingstekens?

c Voor welke x is de ‘afstand’ tussen beide grafieken gelijk aan 4? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Voorbeeld 3

Je ziet de grafiek van $y = \text{int}(x)$ op een grafische rekenmachine. Er is iets geks aan de hand. Je kunt met de grafische rekenmachine een oplossing vinden van de vergelijking $\text{int}(x) = 2{,}5$.

Waarom is dit onjuist?



Figuur 12

Antwoord

De functie $y = \text{int}(x)$ zorgt er voor dat elke waarde van x naar beneden op een geheel getal wordt afgerond. Bij alle x-waarden uit het interval $[2,3\rangle$ is de functiewaarde dus 2. Een uitkomst als 2,5 kan nooit voorkomen, alle uitkomsten (functiewaarden) zijn gehele getallen.

Opgave 9

Bekijk in de **Theorie** wat de entierfunctie voorstelt en daarna **Voorbeeld 3**. De entierfunctie is ook op de grafische rekenmachine te vinden. Los op: $\text{int}(x) = 2$.

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = \text{int}(2x) - 1$.

a Bereken $f(2{,}43)$ en $f(-\pi)$.

b Geef het domein en het bereik van f.

c Los op: $f(x) = 4$.

Verwerken

Opgave 11

a Stel het functievoorschrift op van de lineaire functie f waarvan de grafiek door de punten $P(2{,}80)$ en $Q(8{,}140)$ gaat.

b Stel een voorschrift op van de lineaire functie g waarvan de grafiek door de punten $R(-5{,}15)$ en $S(10,-25)$ gaat.

c Gegeven is dat h een lineaire functie is en $h(3) = 8$ en $h(12) = -19$. Stel het functievoorschrift op van h.

Opgave 12

Los de vergelijking $\left|x^2 - 4\right| = 2$ exact op.

Opgave 13

Twee cilindervormige kaarsen worden tegelijkertijd aangestoken. Ze branden gelijkmatig op. Een uur na het aansteken heeft kaars I een lengte van 75 centimeter en is kaars II nog 71 centimeter lang. 3,5 uur na het aansteken worden beide kaarsen opnieuw gemeten. Kaars I is dan 62,5 centimeter en kaars II is dan nog 61 centimeter lang.

a Stel voor elk van deze kaarsen een formule op voor de lengte l in centimeter als functie van de brandtijd t in uren.

b Hoeveel uur na het aansteken zijn beide kaarsen even lang?

c Hoeveel uur na het aansteken verschillen ze 1 cm in lengte?

Opgave 14

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4x|x - 1|$.

a In welk punt heeft de grafiek van deze functie een knik?

b Schrijf het functievoorschrift in gesplitste vorm, zonder absoluutstrepen.

c Los op: $f(x) < 0{,}7$.

Opgave 15

De grafiek van de functie f met $f(x) = |ax + b|$ gaat door de punten (0,3), (1,1) en (4,5).

Bepaal de waarden van de parameters a en b.

Toepassen

Opgave 16: Taxirit

Een echtpaar wil vanaf het station met de taxi naar huis. Ze kunnen kiezen tussen een treintaxi en een gewone taxi. De treintaxi kost € 3,00 per persoon. De gewone taxi rekent € 2,25 per rit en daarbovenop nog € 0,75 per minuut.

a Bij de gewone taxi is de ritprijs R afhankelijk van het aantal minuten a dat je er in zit. Stel het bijbehorende functievoorschrift $R(a)$ op.

b Bij welke reistijd met de gewone taxi is het voordeliger om een treintaxi te nemen?

c Taxi's rijden in de stad gemiddeld 30 kilometer per uur. Wat raad je dit echtpaar aan als ze 5 km van het station wonen?

Opgave 17: De letter W

Gegeven is het functievoorschrift $y(x) = ||x - 2|-2|$.

a Verklaar waarom de grafiek van deze functie de vorm van de letter W heeft.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van deze functie.

c Los op: $y = 1$.

d Verzin zelf een functievoorschrift waarmee je een letter M (een omgekeerde W) in beeld krijgt, die symmetrisch ligt ten opzichte van de y-as.

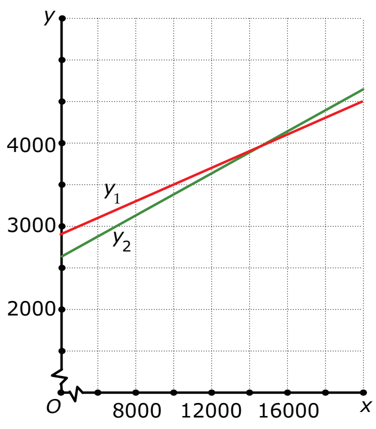
Testen

Opgave 18

Je ziet de grafieken van de jaarlijkse kosten van twee verschillende auto's. Auto A was duurder in de aanschaf dan auto B en heeft mede daarom hogere vaste kosten per jaar, maar is per gereden kilometer iets goedkoper.

a Stel voor beide auto's een passende formule op voor de jaarlijkse kosten als functie van het aantal gereden kilometers.

b Bereken algebraïsch vanaf welk aantal gereden kilometers per jaar het voordeliger is om auto A aan te schaffen. Geef je antwoord in honderdtallen nauwkeurig.



Figuur 13

Opgave 19

De grafiek van een lineaire functie gaat door de punten $A(-24{,}42)$ en $B(30{,}16)$.

Stel een passend functievoorschrift op.

Opgave 20

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}5x + |x - 1| + |1 + 2x|$.

a Waarom kent de grafiek van f twee knikpunten?

b Schrijf het functievoorschrift zonder absoluutstrepen in gesplitste vorm.

c Wat is het bereik van deze functie?

d Los op: $f(x) \geq 4$.