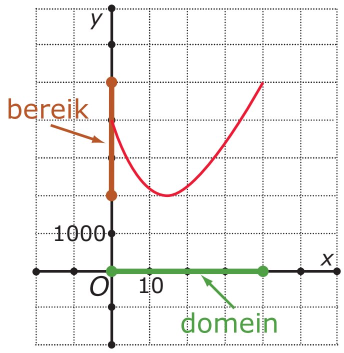
2.2 Domein en bereik

Inleiding

Bij veel functies kun je niet zomaar elk getal invoeren. Zeker niet als ze ‘ergens over gaan’. Ook als uitkomst is vaak niet alles mogelijk, regelmatig vallen ze binnen bepaalde grenzen. Om die beperkingen aan te geven is een speciale notatie nodig.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de intervalnotatie gebruiken om te kunnen aangeven dat waarden beperkt zijn;
- het begrip domein van een functie;
- het begrip bereik van een functie.
- coördinaten van toppen van grafieken berekenen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken van functies goed in beeld brengen.

Verkennen

Opgave V1

Werk bij het **Practicum** van het gewenste practicum ‘Functies en de GR’ het onderdeel door dat gaat over het bepalen van de toppen van een grafiek.

Bij de toppen van een grafiek heeft de bijbehorende functie een maximum (grootste functiewaarde) of een minimum (kleinste functiewaarde).

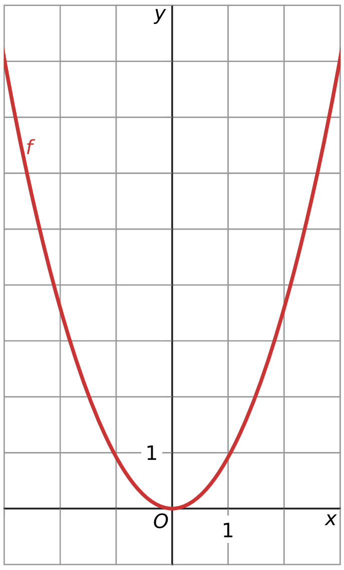
a Liggen alle functiewaarden altijd tussen het minimum en het maximum? Bedenk eens een situatie.

b Zijn er situaties te bedenken dat je niet zomaar alle reële getallen in een functie kunt invoeren? Geef een voorbeeld.

c Hoe zou je kunnen aangeven welke invoerwaarden en welke functiewaarden bij een functie kunnen voorkomen?

Uitleg

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^2$. Je weet dat deze grafiek een parabool is, een dalparabool.



Figuur 2

Van elk reëel getal x kun je het kwadraat uitrekenen, dus er zijn geen beperkingen voor de invoerwaarden. De kleinste functiewaarde is $f(0) = 0$. In de wiskunde worden de woorden ‘domein’ en ‘bereik’ gebruikt:

- het domein is de verzameling van alle mogelijke invoerwaarden; bij functie f is het domein de verzameling van alle reële getallen;
- het bereik is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten: bij functie f is het bereik alle reële getallen $\mathbb{R}$ groter dan of gelijk aan 0.

Kort gezegd is:

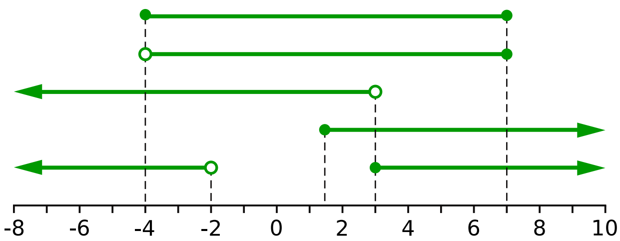
- het domein: $D_f = \mathbb{R}$;
- het bereik: $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.

De notatie $[0, \rightarrow\rangle$ staat voor alle reële getallen groter dan of gelijk aan 0 en is een voorbeeld van de notatie als interval.

Een interval is eigenlijk niets anders dan een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje van een getallenlijn. De notatie ervan is op zich eenvoudig: je schrijft de grenswaarden (de kleinste en de grootste waarden, de kleinste eerst) van het interval op tussen twee haakjes. Er zijn twee afspraken die je moet onthouden:

- de vorm van de haakjes bepaalt of de grenswaarde nog wel bij het interval hoort of juist niet meer;
- voor intervallen die aan één kant geen grenswaarde hebben gebruik je een pijltje.

Je ziet voorbeelden van intervallen met het bijbehorend deel van de getallenlijn.



intervalnotatie	gewone notatie
$[-4, 7]$	$-4 \leqq x \leqq 7$
$\langle -4, 7]$	$-4 < x \leqq 7$
$\langle \leftarrow, 3\rangle$	$x < 3$
$[1{,}5; \rightarrow\rangle$	$x \geqq 1{,}5$
$\langle \leftarrow, -2\rangle \cup [3, \rightarrow\rangle$	$x < -2 \ \vee \ x \geqq 3$

Figuur 3

Je ziet in de figuur het teken $\cup$. Dit teken wordt gebruikt om aan te geven dat je alle getallen van twee (of meer) afzonderlijke intervallen samen bedoelt.

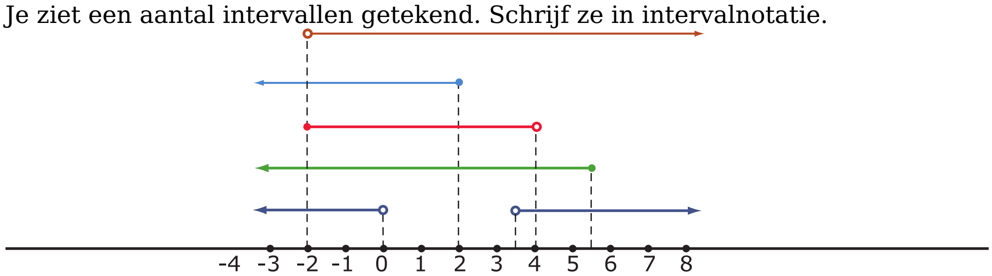
Opgave 1

Bekijk de **Uitleg** nog eens. Let goed op de open en gesloten rondjes en op de bijpassende vorm van de haakjes.

Teken de intervallen $\langle -2{,}4]$, $[2, \rightarrow\rangle$, $[1; 3{,}5]$, $\langle \leftarrow, 0]$ en $\langle \leftarrow, 4\rangle \cup \langle 6, \rightarrow\rangle$.

Opgave 2

Je ziet een aantal intervallen getekend. Schrijf ze in intervalnotatie.



Figuur 4

Opgave 3

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - x^2$.

a Welke waarden kan x aannemen? Schrijf het domein van f op.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de assen.

c Bekijk de grafiek van deze functie. Schrijf het bereik op.

d Stel je neemt als domein van f het interval $[-1,3]$. Wat is dan het bijbehorende bereik?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

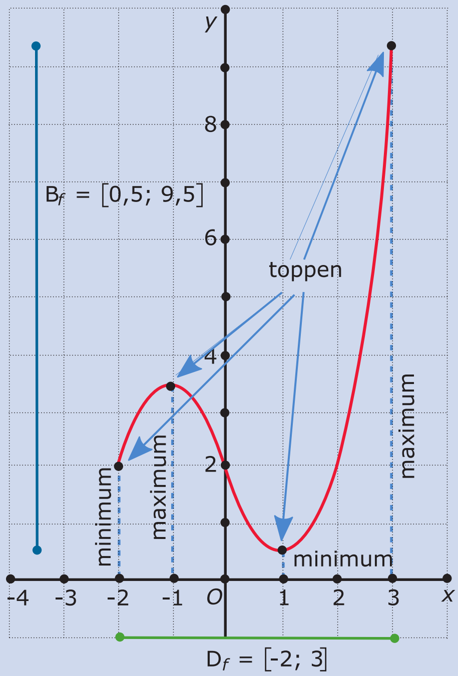
Alle toegestane invoerwaarden samen vormen het **domein** van een functie. Het domein wordt bepaald door:

- beperkingen vanwege het functievoorschrift;
- beperkingen vanuit de situatie.

Het domein van functie f wordt weergegeven met D_f.

Alle mogelijke functiewaarden samen vormen het **bereik** van een functie. Om het bereik van een functie f te kunnen bepalen, heb je een goed beeld van de grafiek van f nodig. Daarbij zijn de toppen van een grafiek vaak van belang. In een top heeft de functie een **maximum** (grootste functiewaarde) of een **minimum** (kleinste functiewaarde). Hoe je deze uiterste waarden kunt bepalen met je rekenmachine, zie je in het **Practicum: Functies met de GR**. Het bereik van functie f wordt weergegeven met B_f.

Voor het domein en bereik van een functie wordt meestal de intervalnotatie gebruikt. Een **interval** is een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje getallenlijn dus. In de uitleg zie je er een paar met het bijbehorende deel van de getallenlijn. Alle reële getallen noteer je als $\mathbb{R}$.



Figuur 5

Bij het geven van de vensterinstelling wordt vanaf nu vaak de notatie $[-10,10] \times [-20,20]$ gebruikt als de vensterinstellingen $-10 \leq x \leq 10$ en $-20 \leq y \leq 20$ zijn.

Voorbeeld 1

De Post NL-tarieven voor de brievenbuspost binnenland zijn in 2014:

- tot 20 gram: € 0,64
- van 20 tot 50 gram: € 1,28
- van 50 tot 100 gram: € 1,92
- van 100 tot 250 gram: € 2,56

Het tarief T is een functie van het gewicht G. Geef het domein en het bereik van die functie.

Antwoord

Het domein van $T(G)$ wordt bepaald door de situatie dat alleen gewichten van 0 tot 250 gram een tarief als brievenbuspost hebben. Dus $\text{D}_T = \langle 0,250 \rangle$.
Het bereik van $T(G)$ wordt ook door de situatie bepaald: alleen enkele losse getallen zijn als uitkomst mogelijk. Je zet die getallen dan tussen accolades: $\text{B}_T = \{0,64; 1,28; 1,92; 2,56\}$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. De tarieven voor brievenbuspost binnen Nederland waren in 2013:

- tot 20 gram: € 0,60
- van 20 tot 50 gram: € 1,20
- van 50 tot 100 gram: € 1,80
- van 100 tot 250 gram: € 2,40
- van 250 tot 500 gram: € 3,00
- van 500 tot 2000 gram: € 3,60

Het tarief T in euro is een functie van het gewicht G in gram.

a Teken een bijpassende grafiek.

b Schrijf het domein van deze functie op.

c Schrijf het bereik van deze functie op.

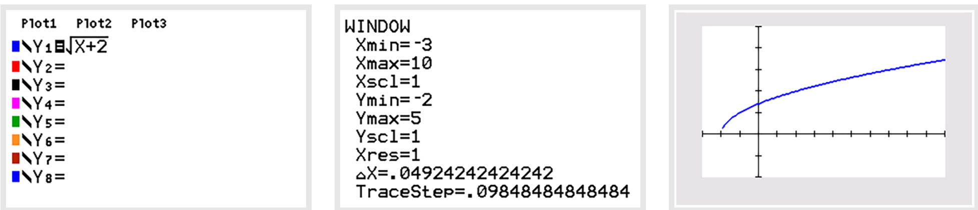
Voorbeeld 2

Breng met de grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = \sqrt{x+2}$ goed in beeld. Geef het domein en bereik van f.

Antwoord

Je kunt niet de wortel nemen van een negatief getal. Dus er moet gelden dat $x + 2 \geq 0$ en hieruit volgt dat $x \geq -2$. Het kleinste getal dat mogelijk is als invoerwaarde is $x = -2$. Je krijgt dan als functiewaarde $f(-2) = \sqrt{-2+2} = 0$. En verder worden de functiewaarden langzaam groter naarmate je een groter getal voor x kiest.

De gebruikte vensterinstelling is $[-3, 10] \times [-2, 5]$.



Figuur 6

Het wortelteken in het functievoorschrift bepaalt het domein en het bereik.

- De wortel uit een negatief getal is niet reëel, dus $D_f = [-2, \rightarrow\rangle$.
- De functiewaarden zijn 0 of groter, dus $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

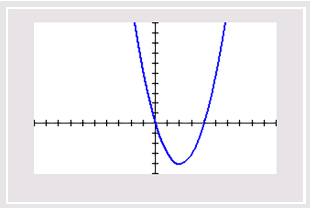
a Welke waarden kan x aannemen? Schrijf het domein van f op.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de assen.

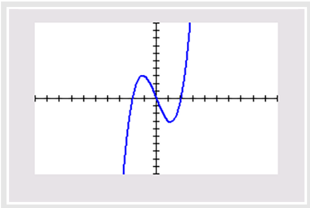
c Bekijk de grafiek van f. Schrijf het bereik van f op.

Opgave 6

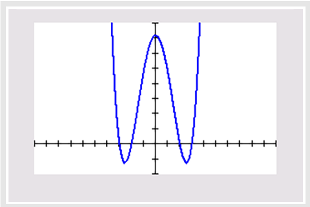
Je ziet vier grafieken van een functie. Alle toppen en nulpunten zijn in beeld.



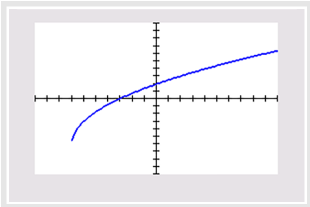
$f(x) = x^2 - 4x$



$g(x) = x^3 - 4x$



$h(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$



$k(x) = -6 + 3\sqrt{x+7}$

Figuur 7

Schrijf het domein en bereik van deze functies op. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = 400 - (x - 10)^2$. Het domein van deze functie is [0,40].

a Breng de grafiek met de grafische rekenmachine goed in beeld. Bekijk eventueel **Voorbeeld 2** of het practicum nog eens.

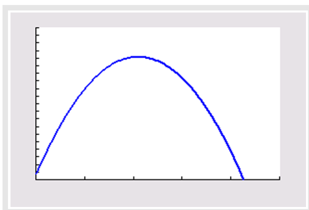
b Geef de coördinaten van de toppen van f.

c Bepaal het bereik van f. (Let op het gegeven domein!)

Voorbeeld 3

Een keeper schopt de bal in de lucht. Voor de hoogte van de bal h in meter na t seconden geldt $h(t) = -3{,}5t^2 + 14{,}7t + 0{,}8$.
Benader het domein en bereik van h in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord



Figuur 8

De grafiek van h is een bergparabool en het domein en bereik daarvan worden bepaald door de situatie.

Je weet dat $t \geq 0$. Verder snijdt de grafiek de horizontale as bij $t \approx 4{,}25$. Dus het domein (afgerond op twee decimalen) is $[0; 4{,}25]$.

Voor het bereik moet je de top van de grafiek bepalen. Met de grafische rekenmachine vind je dat er een maximum is van 16,235. Omdat de bal op de grond komt is de minimale waarde 0. Dus het bereik is $[0; 16{,}235]$.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Maak zelf de grafiek van de gegeven functie en laat je grafische rekenmachine de twee nulpunten berekenen.

b Bepaal ook het maximum van deze functie met behulp van de grafische rekenmachine.

c Bereken hoeveel seconden de bal meer dan 10 meter boven de grond is.
Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

d Schrijf nu ook het domein en het bereik op van de functie $f(x) = -3{,}5x^2 + 14{,}7x + 0{,}8$ zonder beperkingen voor x.

Opgave 9

Bekijk de baan van een kogel die door een kogelstoter zo ver mogelijk wordt gestoten. De kogel komt 14 meter ver. Het hoogste punt van de baan zit 4 meter boven de grond. De baan van de kogel kan worden beschreven met de formule $h(x) = -0{,}0625(x-6)^2 + 4$ waarin h de hoogte van de kogel boven de grond is en x de afstand is die het punt op de grond recht onder de kogel heeft afgelegd vanaf het moment van loslaten.

Figuur 9

a Laat zien dat de kogel inderdaad 14 meter ver komt.

b Welke invoerwaarden zijn hier zinnig? Schrijf het domein van $h(t)$ op.

c Laat zien dat het hoogste punt van de baan inderdaad 4 meter boven de grond zit.

d Welke functiewaarden zijn hier zinnig? Schrijf het bereik van deze functie op.

Verwerken

Opgave 10

Bepaal van de volgende functies het domein en het bereik. Noteer ze als interval met eventuele benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $f(x) = x^2 - x - 6$

b $g(x) = x^2(x-2)(x-3)$

c $h(x) = x^3 - 6x$

d $k(x) = 1 + 2\sqrt{2x-3}$

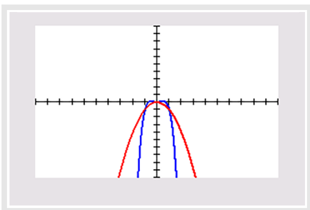
Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = -2(x-10)^2 + 60$ met domein $[0,40]$.

Bepaal het bereik van f.

Opgave 12

Je ziet de grafieken van de functies f en g met $f(x) = x^2 - 2x^4$ en $g(x) = -x^2$ met de standaardinstellingen van het venster.


Figuur 10

a Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

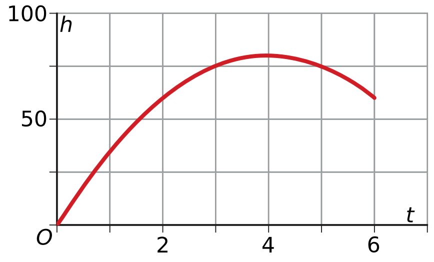
b De standaardinstellingen zijn niet erg gelukkig gekozen als je de toppen en de nulpunten van beide functies wilt zien. Kies betere instellingen en bepaal de toppen van de grafiek van f.

c Bepaal van beide functies het bereik.

d Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f en g.

Opgave 13

Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De hoogte boven de grond hangt af van de tijd tot hij uit elkaar spat. Er geldt: $h(t) = 40t - 5t^2$. Hierin is h de hoogte boven de grond in meter en t de tijd in seconden.



Figuur 11

a De vuurpijl spat na 6 seconden uit elkaar. Hoe hoog komt hij maximaal?

b Schrijf het domein en bereik van deze functie op, rekening houdend met de beschreven situatie.

c Op welke hoogte spat de vuurpijl uit elkaar?

d Hoeveel seconden is de vuurpijl hoger dan 40 meter hoogte?

e Waarom is de getekende grafiek niet de baan van de vuurpijl?

Opgave 14

Een handelaar heeft wekelijks 400 exemplaren van een bepaald product in de verkoop. Hij heeft geen concurrentie, dus de hoeveelheid q die hij verkoopt, hangt alleen af van de prijs p die hij per exemplaar vraagt.
Er geldt: $q = 400 - 0{,}5p$.

a Geef een formule voor de opbrengst R als functie van de prijs p.

b Welke waarden kan p aannemen?

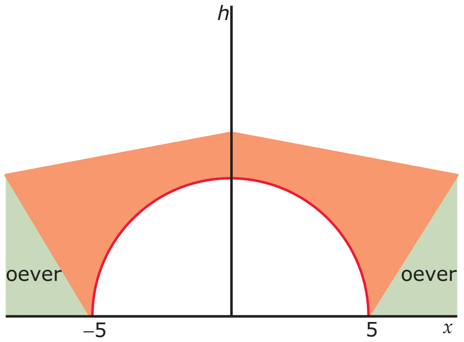
c Welke waarden kan R aannemen?

Opgave 15

De boog onder een brug heeft de vorm van de grafiek van $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (met x en h in meter).

a Welke waarden voor x kun je hier invullen?

b Wat zijn de maximale en de minimale waarden van h?



Figuur 12

Toepassen

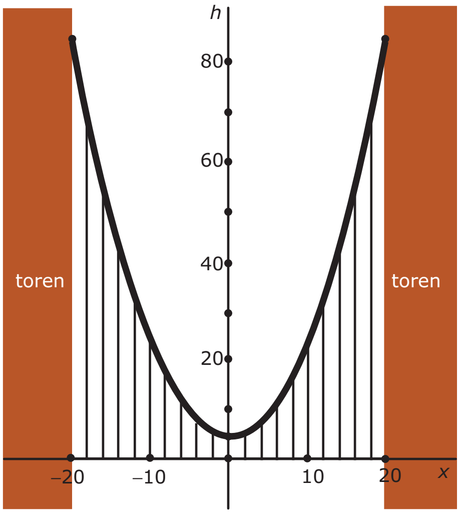
Opgave 16: Hangbrug

Hangbruggen zijn bruggen die zijn opgehangen aan zware spankabels. Die spankabels hangen op hun beurt aan stalen masten of stenen torens. Hier zie je een spankabel hangen tussen twee torens die 40 meter uit elkaar staan. Er geldt: $h(x) = \frac{9}{50} \cdot x^2 + 5$. Aan die spankabels hangen tuidraden waar de brug aan is opgehangen.

a Welke waarden voor x zijn in deze situatie zinnig?

b Hoe lang zijn de kortste en de langste tuidraden?

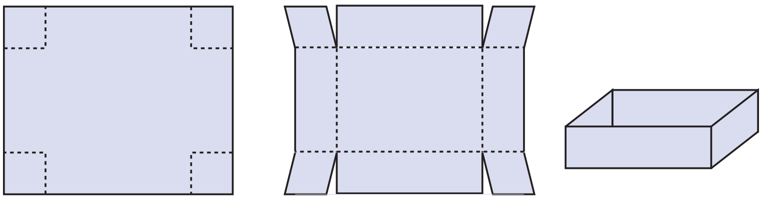
c Er zijn twee tuidraden met een lengte van 51,08 meter. Hoe ver hangen deze twee tuidraden van elkaar?



Figuur 13

Opgave 17: Bakje van karton

Van een rechthoekig stuk karton van 12 cm bij 20 cm kun je een bakje maken. Daarvoor teken je in iedere hoek een vierkantje. Je knipt van elk vierkantje één zijde helemaal in en plakt het doosje in elkaar zoals je in de figuren kunt zien.



Figuur 14

Als je er op dezelfde wijze een deksel bij maakt, krijg je een doosje waarvan de inhoud I wordt bepaald door de afmetingen van het vierkantje.

a Noem de lengte en de breedte van het vierkantje x. Stel een formule op voor $I(x)$.

b Bepaal het domein en het bereik van $I(x)$. Rond af op twee decimalen.

c Hoe groot moet het vierkantje zijn om een maximale inhoud te krijgen?

Testen

Opgave 18

Breng de grafiek van deze functies in beeld met de standaardinstellingen van het venster. Schrijf het domein en bereik van deze functies op.

a $f(x) = 4 - (x-2)^2$

b $g(x) = 4$

c $h(x) = 2 + \sqrt{4-x}$

Opgave 19

Gegeven is het functievoorschrift $y(x) = x^4 - 8x^2$.

a Bereken $y(3)$ en $y(-3)$.

b Bereken exact de nulpunten van $y(x)$.

c Bepaal met behulp van de grafische rekenmachine de toppen van de grafiek en schrijf het bereik van deze functie op.

Practicum: Grafische rekenmachine

Als je met functies werkt, wil je alle karakteristieken (nulpunten, toppen en asymptoten) in beeld. In het volgende practicum kun je nalezen hoe dat gaat. Bekijk alleen het stukje ‘Functiewaarden, nulpunten en toppen’, de rest heb je pas later nodig.

- **Functies en de TI83/TI84**
- **Functies en de TInspire**
- **Functies en de Casio fx-CG50**
- **Functies en de HPprime**
- **Functies en de NumWorks**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.