

2.1 Het begrip functie

Inleiding

Je hebt al met formules gewerkt. Soms beschrijft een formule een verband tussen twee variabelen. Voer je voor de éne een getal in, kun je vaak de andere variabele uitrekenen. Komt er dan telkens precies één uitkomst (en niet meerdere), dan spreek je van een functie. In dit deel zal worden ingegaan op wat een functie nou precies is. En hoe je er een grafiek bij kunt (laten) maken.

Je leert in dit onderwerp

- wat een functie en een functievoorschrift zijn;
- grafieken van functies tekenen/plotten;
- nulpunten berekenen van functies;
- snijpunten van grafieken met de grafische rekenmachine berekenen.

Voorkennis

- met formules werken: erin invullen en ze herleiden;
- eenvoudige vergelijkingen oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v . Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m).

- Hoeveel bedraagt het opgewekte vermogen bij een diameter van 20 meter en een windsnelheid van 10 meter per seconde?
Ga uit van een windmolen met een diameter van 20 m.
- Hoe komt de formule voor het vermogen als functie van de windsnelheid er dan uit te zien?
- Bij welke instellingen van het venster krijg je de grafiek van P als functie van v goed in beeld? Houd daarbij rekening met in Nederland voorkomende windsnelheden.



Figuur 1

Uitleg

Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v . Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m). Bij een diameter van 20 meter en een windsnelheid van 10 meter per seconde is het vermogen $P = 0,00013 \cdot 10^3 \cdot 20^2 \approx 52$ kiloWatt.

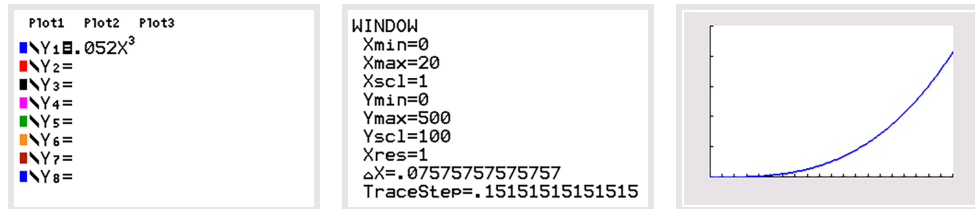
Je bekijkt een windmolen met wieken van 10 meter. Je wilt snel een tabel maken van het vermogen bij verschillende windsnelheden. Vul dan $D = 20$ in en schrijf de formule als $P = 0,052 \cdot v^3$. Om



Figuur 2

duidelijk te maken dat P afhangt van v schrijf je $P(v) = 0,052 \cdot v^3$. Dit heet een functievoorschrift en P is een functie van v . Bij elke waarde van v hoort precies één uitkomst: bij $v = 10$ hoort $P = 52$. Dit schrijf je korter als $P(10) = 52$. En in plaats van uitkomst noem je 52 een functiewaarde.

Met de grafische rekenmachine kun je bij de functie met voorschrift $P(v) = 0,052 \cdot v^3$ een tabel en een grafiek maken. Je voert de formule dan op de grafische rekenmachine in als $Y1=0.052*X^3$. Daarna stel je de afmetingen van het venster in en maak je de grafiek.



Figuur 3

Bestaan er ook verbanden die geen functie zijn?

Neem het verband $x^2 + y^2 = 100$. Kies je als invoerwaarde $x = 0$, dan krijg je de vergelijking $y^2 = 100$ en deze heeft als oplossing $y = 10$ of $y = -10$. En daarom is y geen functie van x .

Opgave 1

Voor de windmolen met wieken van 10 meter geldt $P(v) = 0,052v^3$. Daarin is P het vermogen in kiloWatt (kW) en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

- Bereken $P(6)$ betekent hetzelfde als:
 - Bereken de functiewaarde bij invoerwaarde $v = 6$.
 - Bereken de invoerwaarde bij functiewaarde $v = 6$.
 - Bereken de functiewaarde als $P = 6$.
 - Bereken de invoerwaarde als $P = 6$.
- Bereken $P(6)$.
- Windsnelheden van 0 tot 15 m/s komen in de kustgebieden regelmatig voor. Breng het deel van de grafiek van P dat daarbij hoort in beeld op de grafische rekenmachine. Welke waarden voor P horen daarbij?
- Voor welke waarde van v geldt: $P(v) = 300$?

Opgave 2

Bekijk de [Uitleg](#). Neem nu een windmolen met een wieklength van 20 meter.

- Welk voorschrift geldt voor P als functie van v ?
- Bereken $P(10)$.
- Breng de grafiek in beeld voor windsnelheden vanaf 0 tot 20 meter per seconde. Welke vensterinstellingen heb je nodig om de complete grafiek in beeld te krijgen?
- Bij welke windsnelheid in kilometer per uur (km/h) is het vermogen 40 kiloWatt (kW)?

Opgave 3

In de [Uitleg](#) zie je dat de formule $x^2 + y^2 = 100$ geen functie is.

Een getallenvoorbeeld maakt dit duidelijk.

- Geef nog een voorbeeld waaruit blijkt dat de formule $x^2 + y^2 = 100$ geen functievoorschrift is.
- Schrijf deze formule in de vorm $y =$
- Door welke twee functievoorschriften y_1 en y_2 kun je de formule vervangen?
- Breng de grafieken van deze functies in beeld. Welke vensterinstellingen gebruik je?
- Bereken exact $y_1(5)$ en $y_2(5)$.

Theorie en voorbeelden

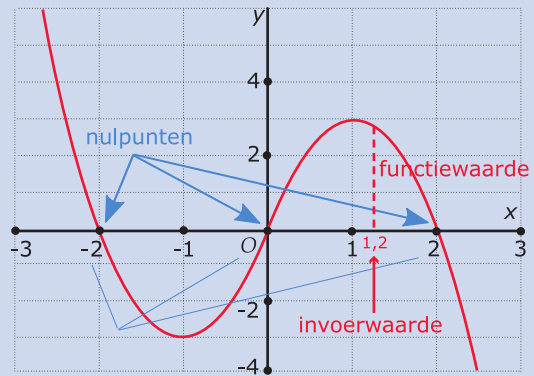
Om te onthouden

Bij een formule zoals $y = -x^3 + 4x$ vind je bij elke mogelijke waarde van x precies één waarde van y . In dat geval is y een **functie** van x met **functievoorschrift** $y(x) = -x^3 + 4x$.

Bij een functie kun je een tabel maken en een grafiek tekenen. De **invoerwaarden** komen op de horizontale as, de x -as. De uitkomsten heten **functiewaarden**. De functiewaarde bij $x = 1$ is bijvoorbeeld $y(1) = -1^3 + 4 \cdot 1 = 3$. Functiewaarden komen op de y -as.

Voor $y(x)$ wordt ook wel $f(x)$ gebruikt. y is dan een functie van x die f heet. f is dus geen variabele, maar de 'naam' van een functie. In praktijksituaties gebruik je vaak letters die verwijzen naar de betekenis van de variabelen. Bijvoorbeeld t voor tijd, l voor lengte, I voor inhoud, v voor snelheid, P voor vermogen, enzovoort. De grafische rekenmachine werkt standaard met X voor invoerwaarden en Y voor functiewaarden.

De **nulpunten** van een functie zijn de invoerwaarden waarbij de functiewaarde (de uitkomst dus) 0 is. Een nulpunt is dus een getal. Een nulpunt wordt ook wel **nulwaarde** genoemd. Bij de gegeven functie kun je de x -waarden van de nulpunten van deze functie vinden door $y(x) = -x^3 + 4x = 0$ uit te rekenen. De nulpunten van deze functie zijn $x = 0, x = -2$ en $x = 2$.



Figuur 4

Voorbeeld 1

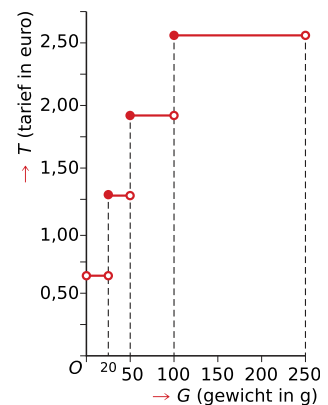
De Post NL-tarieven voor de brievenbuspost binnenland in 2014:

- tot 20 gram: € 0,64
- van 20 tot 50 gram: € 1,28
- van 50 tot 100 gram: € 1,92
- van 100 tot 250 gram: € 2,56

Is het tarief T een functie van het gewicht G ? Of is het gewicht G een functie van het tarief T ?

Antwoord

Bij elke (toegestane) waarde voor het gewicht G vind je precies één tarief T . Dus T is een functie van G . Let op dat als je een brief van 20 gram hebt, je € 1,28 moet betalen en niet € 0,64. In de grafiek zie je een open rondje aan het einde van de lijnstukken. Dit betekent dat het einde van zo'n lijnstuk niet meedoet. Omgekeerd is G geen functie van T .



Figuur 5

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** vind je de posttarieven van 2014.

- Bepaal $T(15)$.
- Als je weet hoe zwaar een brief is, weet je voor hoeveel euro aan postzegels je er op moet plakken. Klopt dat? Licht je antwoord toe.
- Als je ziet voor hoeveel euro aan postzegels er op een brief zit, weet je hoe zwaar hij is. Klopt dat? Licht je antwoord toe.
- Welke oplossingen heeft de vergelijking: $T(G) = 1,92$?
- Waarom is G geen functie van T ?

Opgave 5

Bekijk de functie f met voorschrift $f(x) = 0,5x^2 - 2x$.

- Bereken de nulpunten van f .
- Welke snijpunten heeft de grafiek van f met de x -as?
- Los op: $f(x) = 6$.

Voorbeeld 2

Je ziet twee formules bij verbanden tussen x en y .

- $y = \sqrt{x}$
- $y^2 = x$

Verder zie je de grafieken bij deze verbanden, gemaakt in GeoGebra.

Is y een functie van x in de formule $y = \sqrt{x}$?

Is y een functie van x in de formule $y^2 = x$?

Antwoord

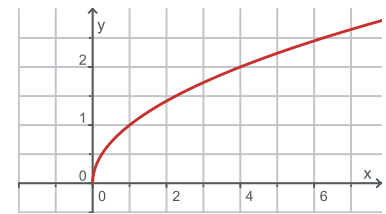
Kies bijvoorbeeld: $x = 4$.

Bij formule $y = \sqrt{x}$ vind je: $y = 2$.

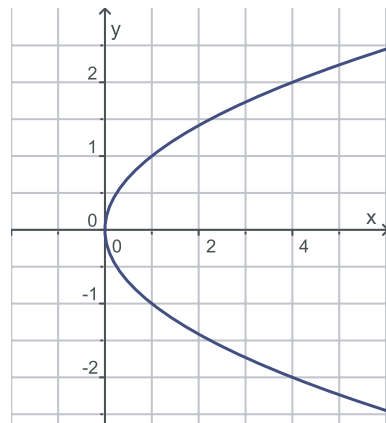
Bij formule $y^2 = x$ vind je: $y = 2 \vee y = -2$.

Bij de formule $y = \sqrt{x}$ vind je bij elke waarde voor x precies één waarde van y . Als x negatief is vind je geen waarden van y . Dus bij de formule $y = \sqrt{x}$ is y een functie van x .

Bij de formule $y^2 = x$ vind je bij vrijwel alle x -waarden twee waarden van y . Alleen bij $x = 0$ vind je er maar één. Bij negatieve x -waarden vind je geen uitkomsten. Dus bij de formule $y^2 = x$ is y geen functie van x .



$y = \sqrt{x}$

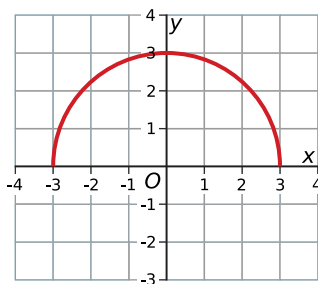


$y^2 = x$

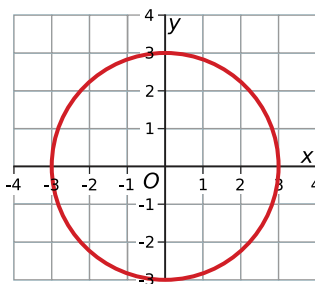
Figuur 6

Opgave 6

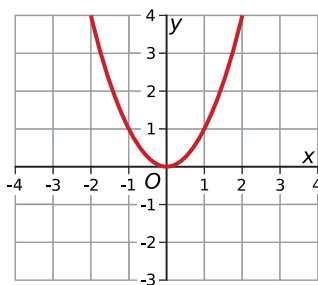
Je ziet vier grafieken. Bij welke van deze grafieken is y een functie van x ?



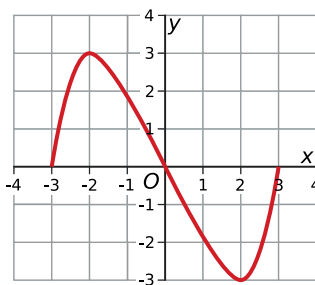
A



B



C



D

Figuur 7

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = 10x - 0,1x^3$ en $g(x) = x + 10$.
Los de ongelijkheid $f(x) \leq g(x)$ op één decimaal nauwkeurig op.

Antwoord

Om de snijpunten te achterhalen moet je de vergelijking $f(x) = g(x)$ oplossen. Om deze vergelijking met de grafische rekenmachine op te lossen, moet je eerst de grafieken van beide functies in beeld brengen. Daarvoor heb je goede vensterinstellingen nodig. Je kunt gewoonweg wat proberen, maar je kunt dit ook systematisch doen.

De grafiek van g is een rechte lijn die door de punten $(-10,0)$ en $(0,10)$ gaat. Als je de nulpunten van f algebraïsch uitrekent, dan vind je:

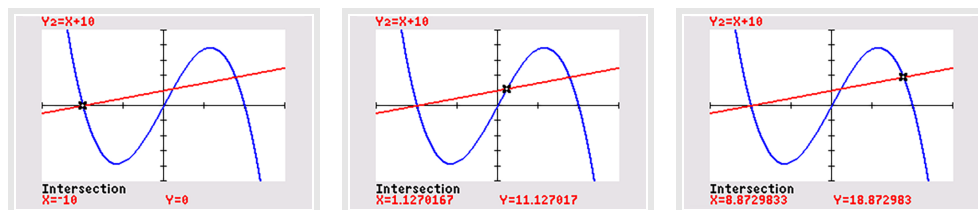
$$\begin{aligned} 10x - 0,1x^3 &= 0 \\ 100x - x^3 &= 0 \\ x(100 - x^2) &= 0 \\ x(10 - x)(10 + x) &= 0 \end{aligned}$$

De nulpunten zijn $x = -10$, $x = 0$ en $x = 10$.

Laat je rekenmachine nu een tabel bij de formules maken met stapgrootte 1 vanaf $x = -15$ tot en met $x = 15$. Je ziet dat de functiewaarden tussen -50 en 50 liggen. Als je als vensterinstelling $-15 \leq x \leq 15$ en $-50 \leq y \leq 50$ kiest, krijg je beide grafieken goed in beeld (het aantal schaalstreepjes op de as kun je ook nog instellen). De drie snijpunten zijn dan ook goed in beeld.

Met de grafische rekenmachine vind je voor de x -coördinaten van de snijpunten $x = -10 \vee x \approx 1,13 \vee x \approx 8,87$.

De oplossing van de ongelijkheid is $-10 \leq x \leq 1,1 \vee x \geq 8,9$.



Figuur 8

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3** waarom het berekenen van nulpunten belangrijk is voordat je de functie in beeld brengt op de grafische rekenmachine. Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 130$ en $g(x) = 3x$.

- Breng de grafieken van f en g in beeld met de standaard vensterinstellingen van de grafische rekenmachine. Krijg je veel te zien?
- Bereken exact de nulpunten van f .
- De grafiek van f is een dalparabool. Wat is de top van deze parabool?
- Pas je vensterinstellingen zo aan, dat deze punten in beeld komen. Schrijf de bijbehorende instellingen op.
- Breng nu ook de grafiek van g in beeld. Hoeveel snijpunten hebben beide grafieken?
- Bepaal met de grafische rekenmachine de snijpunten van beide grafieken. Bereken deze snijpunten ook algebraïsch.

Opgave 8

Gegeven zijn de functies $y_1 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$ en $y_2 = -x^2 - x + 6$.

- Bereken van beide functies de nulpunten.
- Breng nu beide grafieken in beeld. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt om alle snijpunten met de assen en toppen in beeld te krijgen.

- c Bepaal alle snijpunten van de grafieken van de functies. Rond indien nodig af op twee decimalen.
- d Los op $y_1 < y_2$. Rond af op één decimaal.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 8 - 4x + x^3$.

- a Bereken $f(3)$.
- b Bereken de x -waarden waarvoor $f(x) = 8$.
- c Bij welke vensterinstellingen krijg je de nulpunten en de toppen van de grafiek van f in beeld?
- d Hoort bij elke waarde van x precies één waarde van y ? Of kun je tegenvoorbeelden vinden?
- e Hoort bij elke waarde van y precies één waarde van x ? Of kun je tegenvoorbeelden vinden?

Opgave 10

Voor het gebruik van water betaal je jaarlijks € 35,00 en nog € 0,77 per verbruikte kubieke meter (m^3) water. De jaarlijkse kosten K (in euro's) hangen af van het aantal m^3 (a) dat je verbruikt.

- a Waarom is K een functie van a ?
- b Bereken $K(100)$.
- c Stel het functievoorschrift $K(a)$ op.
- d De meeste gezinnen betalen minder dan € 500,00 per jaar voor hun waterverbruik. Hoeveel kubieke meter water gebruiken die gezinnen op zijn hoogst?

Opgave 11

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100 - x^2$ en $g(x) = x^2$.

- a Bereken de nulpunten en de top van de grafiek van f .
- b Breng de grafieken van f en g in beeld met de grafische rekenmachine. Schrijf op bij welke vensterinstellingen de nulpunten en toppen van beide functies goed zichtbaar zijn.
- c Bereken algebraïsch in twee decimalen nauwkeurig de snijpunten van beide grafieken.

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f_1(x) = x^4 - 2x^2$ en $f_2(x) = -x^2 + 4x$.

- a Bereken algebraïsch van beide functies de nulpunten.
- b Breng nu beide grafieken in beeld. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt om alle nulpunten en toppen in beeld te krijgen.
- c Bepaal de snijpunten van de grafieken van beide functies in één decimaal nauwkeurig.
- d Los op: $f_1(x) < f_2(x)$.

Opgave 13

Je ziet vier functievoorschriften. Bereken telkens eerst algebraïsch de nulpunten van de functie. Schrijf vervolgens de vensterinstellingen op waarmee de grafiek goed in beeld komt.

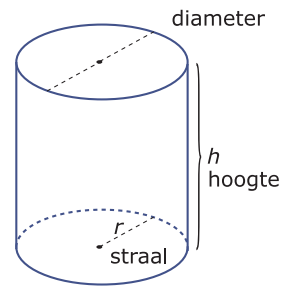
- a $f(x) = 100x - x^2$
- b $g(x) = 10x(x - 50)$
- c $h(x) = (x - 10)^2 - 1600$
- d $l(x) = 2\sqrt{x + 3} - 5$

Toepassen

Opgave 14: Cilindrisch blikje

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Van een bepaalde serie blikjes is bekend dat de hoogte even groot is als de diameter.

- Voor deze serie blikjes is V een functie van r . Schrijf het bijpassende functievoorschrift op.
- Neem aan dat $0 < r < 20$. Breng nu de grafiek van de functie $V(r)$ in beeld. Schrijf de geschikte vensterinstellingen op.
- Bij welke r geldt: $V = 1000 \text{ cm}^3$?



Figuur 9

Opgave 15: De baan van een afgeschoten kogel

De baan van een afgeschoten kogel wordt gegeven door $h(x) = -0,01x^2 + 40x$, waarin h de hoogte in meter van de kogel boven de begane grond en x de horizontale afstand in meter tot de plaats waar de kogel is afgeschoten.

- Bereken na hoeveel meter de kogel weer op de grond komt.
- Breng de baan van de kogel in beeld. Schrijf de daarbij behorende vensterinstellingen op.
- Hoe hoog komt de kogel maximaal?
- Voor welke x -waarden is de hoogte van de kogel hoger dan 10000 meter? Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.

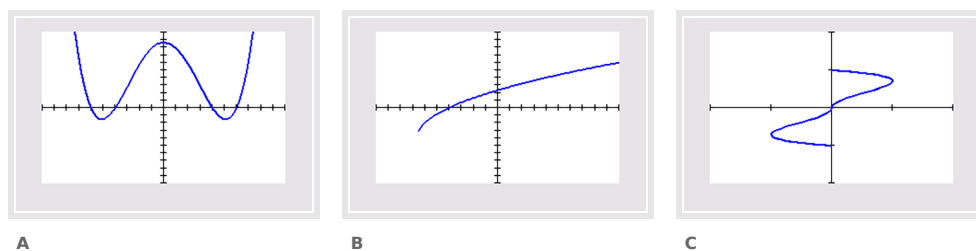
Testen

Opgave 16

Gegeven zijn de functies $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 4)$ en $g(x) = 4x - 7$

- Bereken $f(5) - g(2)$.
- Bereken algebraïsch de nulpunten van f .
- Los op: $f(x) < g(x)$. Rond af op één decimaal.

Opgave 17



Figuur 10

Je ziet hier drie grafieken in het Oxy -assenstelsel van een grafische rekenmachine.

- Bij welke van deze grafieken is y een functie van x ?
- Bij welke van deze grafieken is x een functie van y ?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
